

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



APUNTES
DE
"HIDRÁULICA BÁSICA"



APUNTES DE:

“HIDRÁULICA BÁSICA”

TEMARIO

1. DEFINICIÓN Y OBJETIVO.
2. PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.
3. HIDROSTÁTICA.
4. ECUACIONES FUNDAMENTALES.
5. APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES

1. DEFINICIÓN Y OBJETIVO

Hidráulica es una de las principales ramas de la Ingeniería Civil que trata los problemas relacionados con la utilización y el manejo de los fluidos, principalmente el agua. Esta disciplina se avoca, en general, a la solución de problemas tales como, el flujo de líquidos en tuberías, ríos y canales y a las fuerzas desarrolladas por líquidos confinados en depósitos naturales, tales como lagos, lagunas, estuarios, etc., o artificiales, como tanques, pilas y vasos de almacenamiento, en general.

El desarrollo de la hidráulica se ha basado principalmente en los conocimientos empíricos transmitidos a través de generaciones y en la aplicación sistemática de ciencias, principalmente Matemáticas y Física. Una de estas ciencias, es la Mecánica de los Fluidos, que proporciona las bases teóricas en que descansa la hidráulica.

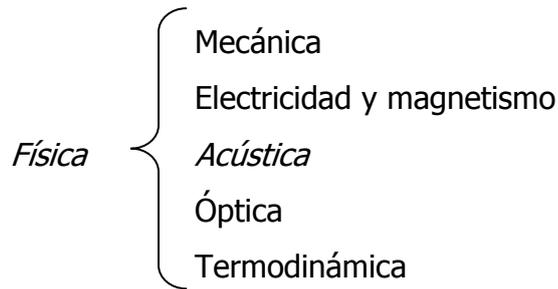
El objetivo del presente curso es la de que el alumno reafirme los conceptos básicos en hidráulica ambiental requeridos para toda investigación formal, en el afán de nivelar los conocimientos de los aspirantes de diferentes formaciones.

2. PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

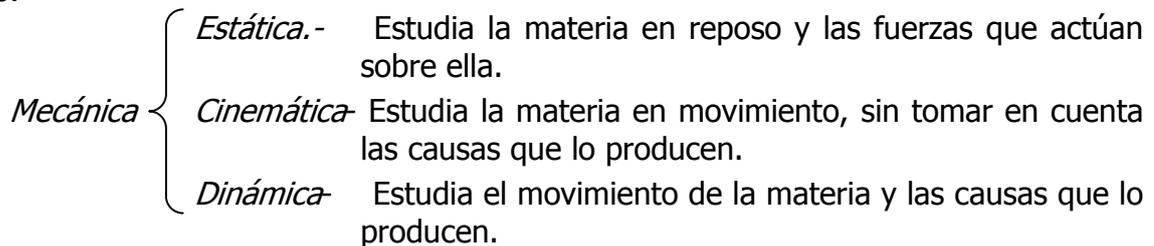
Para emprender el estudio de la hidráulica es conveniente, tener un conocimiento claro de los principios fundamentales de la física. A continuación se presentan algunos de estos conceptos.

Fuerza de gravedad.- se refiere a la fuerza gravitacional entre la Tierra y los objetos situados en su superficie o cerca de ella. Por lo regular se mide de acuerdo a la aceleración que proporciona a un objeto en la superficie de la Tierra. En el Ecuador, la aceleración de la gravedad es de $9,7799 \text{ m/s}^2$, mientras que en los polos es superior a $9,83 \text{ m/s}^2$. El valor que suele aceptarse internacionalmente para la aceleración de la gravedad en cálculos que no requieren mucha precisión es de 9.81 m/s^2 .

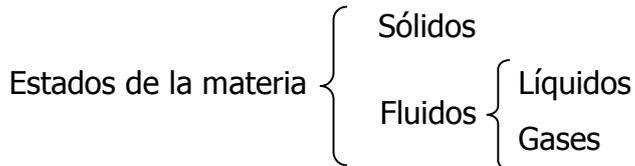
Los campos de estudio de la Física clásica, conocida también como, Física newtoniana, son:



Mecánica.- describe los efectos de fuerzas en cuerpos (materia) en movimiento o reposo.



La materia se puede encontrar en cualquiera de los siguientes estados:



Fluido.- estado de la materia que no presenta resistencia a la deformación. Bajo esta categoría se agrupan los líquidos y los gases.

Sistema de unidades.- Las cantidades físicas se miden en el tiempo y en el espacio, haciendo uso de algún sistema de unidades de medición. Con base en estas unidades, se describen las diferentes magnitudes físicas, las cuales pueden ser fundamentales ó derivadas. La longitud (L) y el tiempo (t) se consideran dimensiones fundamentales en cualquier sistema de unidades pero la masa (m) y la fuerza (F) se consideran dimensiones fundamentales en ciertos sistemas y dimensiones derivadas en otros.

Para definir las unidades de medida se utilizan diferentes sistemas, pero en general se pueden identificar dos: el *métrico* y el *inglés*, los cuales a su vez pueden ser absolutos o gravitacionales.

Temperatura.- Es una cantidad que representa el nivel de energía calorífica en la materia. En el sistema métrico la unidad de temperatura es grado centígrado ($^{\circ}C$) y en el sistema inglés es el grado Fahrenheit ($^{\circ}F$). La conversión entre estas unidades es

$$^{\circ}F = \frac{9}{5}^{\circ}C + 32 \quad \text{o bien} \quad ^{\circ}C = \frac{5}{9} (^{\circ}F - 32)$$

Factores de conversión.- Los cálculos matemáticos, por lo regular, involucran diferentes tipos de unidades de medición y con frecuencia se requiere transformar las unidades de un sistema a otro. Para lograr esto, se hace uso de factores de conversión que relacionan las unidades de una misma clase. Por ejemplo para convertir del sistema inglés al sistema métrico, algunos factores de conversión son los siguientes:

Longitud

1 Pulgada (in) = 2.54 cm.

1 pie (ft) = 30.48 cm. = 12 plg

1 yarda (yd) = 3 pies = 36 plg = 91.44 cm.

1 milla (mi) = 1760 yardas = 5280 pies = 1609 m.

Volumen

Onza (fluida) = 29.573 ml

Pint (pt) = 16 onzas = 0.473 l

Quart (qrt) = 2 pints = 0.946 l

Gallon (gal) = 4 quart = 3.785 l

barrel = 31 a 42 gallons (no muy precisa)

Fuerza

Grain = 64.8 mg.

Dram = 27.344 grains=1.772 gr.

Onza (oz) = 16 dram=28.35 gr.

Pound (lb) = 16 Onzas=453.59 gr.

Tonelada corta =2000 libras= 0.907 tonelada métrica.

Tonelada larga =1.12 toneladas cortas=1.016 toneladas métricas.

Los factores de conversión también se pueden expresar como cocientes para facilitar las conversiones, por ejemplo

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm} \quad \text{o bien} \quad \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} = 1$$

De esta manera, al convertir las unidades, solamente se requiere multiplicar el cociente apropiado que permite eliminar las unidades que se desean convertir. Por ejemplo, para convertir 25 cm a pulgadas (in), se realiza la siguiente operación:

$$\cancel{25} \text{ cm} \times \frac{1 \text{ in}}{\cancel{2.54} \text{ cm}} = 9.842 \text{ in}$$

Ejercicios

1.- convertir las siguientes cantidades del sistema inglés al métrico

$$298.32 \text{ ft/s}^2 = ? \text{ m/s}^2$$

$$38 \text{ gal/min} = ? \text{ l/s} = ? \text{ m}^3/\text{s}$$

$$2487 \text{ lb/in}^2 = ? \text{ kg/cm}^2 = ? \text{ ton/m}^2$$

2.- Convertir la densidad y el peso específico del agua en condiciones normales del sistema métrico al sistema inglés para cantidades absolutas y gravitacionales

$$\rho = 102 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} = ? \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}^4} = ? \frac{\text{kg}_m}{\text{m}^3} = ? \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3}$$

$$\gamma = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = ? \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = ? \frac{\text{newtons}}{\text{m}^3}$$

2.1 PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

Para fines de este Curso, solo se verán aquellas propiedades de los fluidos que tiene aplicación en los temas que lo conforman.

A) DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

Peso específico o peso volumétrico (γ), se define como el peso (W) de una unidad de volumen (Vol) de un fluido, es decir sustancia

$$\gamma = \frac{W}{Vol}$$

Ejemplo

Un litro de aceite lubricante medio pesa aproximadamente 905 gr., entonces el peso específico o volumétrico de este aceite es de 905 gr/l ó bien, 0.905 kg/m³.

Densidad, masa específica o masa volumétrica (ρ) Se define como la masa o materia que está contenida en la unidad de volumen.

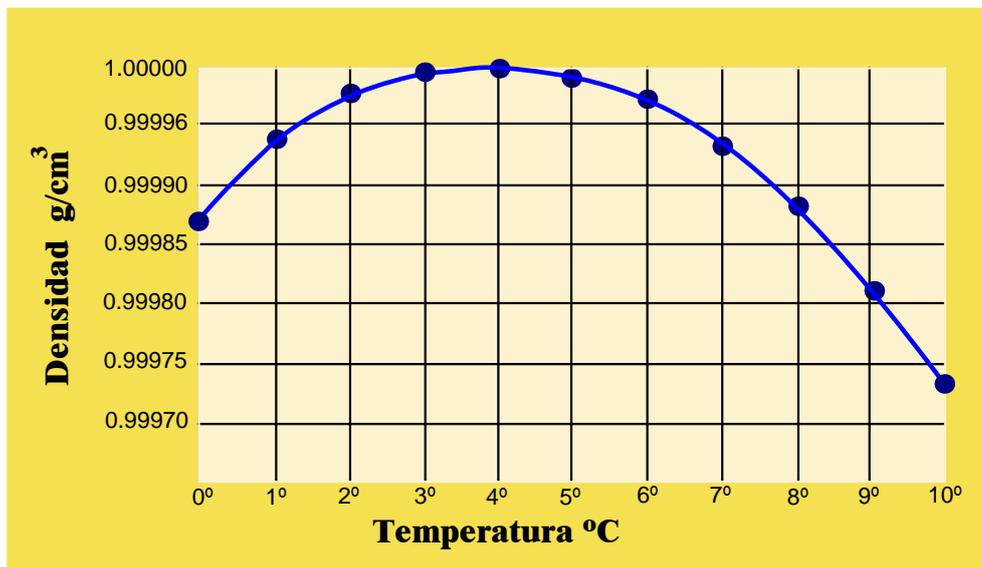
$$\rho = \frac{masa}{Vol}$$

Ejemplo

En un litro de agua contiene aproximadamente 1 kg-masa de materia.

El peso específico varía con la temperatura y la presión. Para condiciones normales, es decir a 20 °C y a una atmósfera, el peso específico del agua tiene un valor de 1000 kg./m³ ó 1 kg/l. La densidad para estas condiciones es de 102 kgs²/m⁴

La densidad también varía con la temperatura, lo cual se muestra en la figura siguiente



Como se puede apreciar, la densidad del agua tiene un valor máximo a una temperatura de 4°C. Esto se debe a que, a tal temperatura el volumen del agua es menor.

El peso específico y la densidad se relacionan de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

lo cual se demuestra como sigue:

$$\rho = \frac{m}{Vol}$$

pero como

$$w = mg \quad \text{ó} \quad m = \frac{w}{g}$$

y de la definición de peso específico se tiene que $w = \gamma Vol$, entonces $m = \frac{\gamma Vol}{g}$

y sustituyendo en la definición de densidad

$$\rho = \frac{\frac{\gamma Vol}{g}}{Vol} = \frac{\gamma}{g}$$

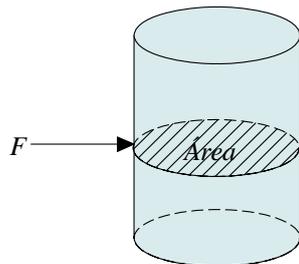
Densidad relativa (D_r).- es la relación de la densidad de cualquier sustancia y la densidad del agua, también se puede expresar como la relación entre pesos específicos.

$$D_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}}$$

B) VISCOSIDAD

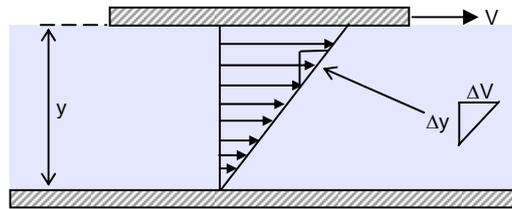
La viscosidad es la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales. Un fluido que no tiene viscosidad se llama fluido ideal, en realidad todos los fluidos conocidos presentan algo de viscosidad, siendo el modelo de viscosidad nula una aproximación bastante buena para ciertas aplicaciones.

Un esfuerzo es una fuerza distribuida sobre un área. Cuando esta fuerza es paralela al área se le llama *esfuerzo cortante* (δ).



$$\delta = \frac{F}{Area}$$

Viscosidad dinámica (μ).- es la propiedad de un fluido que determina su resistencia al esfuerzo cortante



Gradiente.- variación de la velocidad perpendicular al movimiento, matemáticamente se presenta como

$$\frac{\Delta V}{\Delta y}$$

Suposiciones

- 1) *La velocidad de las partículas del líquido en contacto con la placa móvil, es la misma que la de la placa.*
- 2) *La variación de la velocidad en dirección normal al movimiento tiene forma lineal.*
- 3) *El esfuerzo cortante entre dos capas contiguas de líquido es proporcional a la variación de la velocidad.*

De la segunda suposición, se tiene que

$$\frac{V}{y} = \frac{\Delta V}{\Delta y}$$

Si se define δ como el esfuerzo y de acuerdo a la suposición 3

$$\delta = \mu \frac{\Delta V}{\Delta y}$$

donde μ = constante de proporcionalidad. Entonces, reagrupando se tiene

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{\Delta V}{\Delta y} = \frac{V}{y}$$

o bien

$$\mu = \delta \frac{y}{V}$$

entonces a μ se le conoce como *viscosidad dinámica ó absoluta*. En el sistema *mks* gravitacional las unidades de viscosidad son:

$$[\mu] = [\delta] \frac{[y]}{[V]} = \left[\frac{kg}{m^2} \right] \frac{[m]}{\left[\frac{m}{s} \right]} = \left[\frac{kg \cdot s}{m^2} \right]$$

y en el sistema *cgs* absoluto, la viscosidad se expresa como

$$[\mu] = \left[\frac{gr_m}{cm \cdot s} \right] = \text{poise}$$

Viscosidad cinemática.- relación entre la viscosidad absoluta y la masa específica o densidad.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

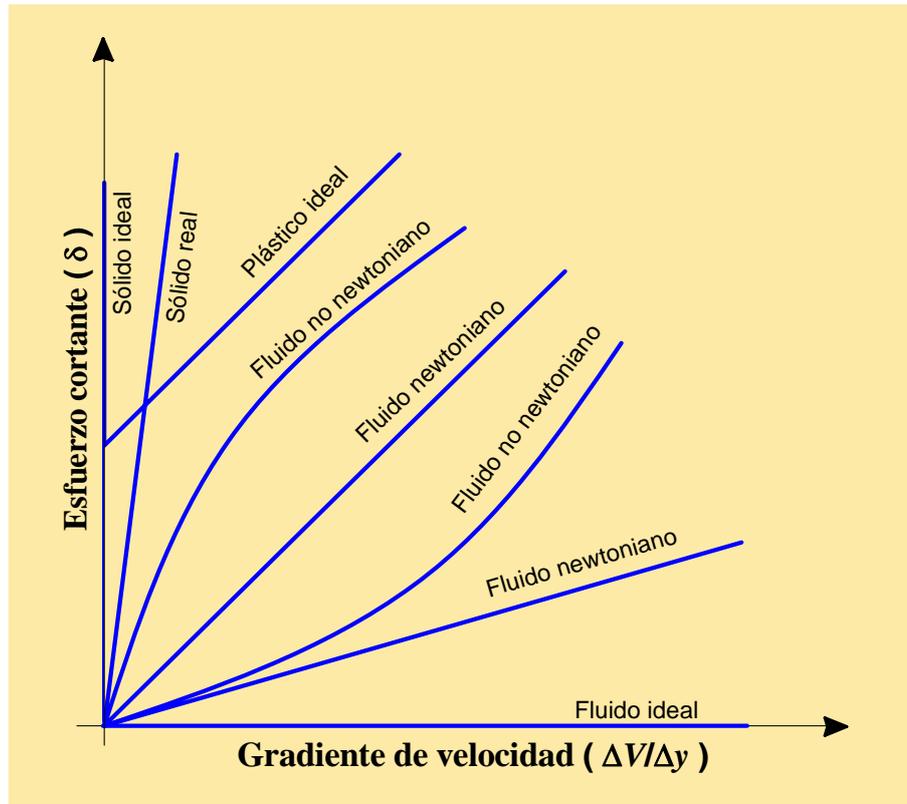
Las unidades de la viscosidad cinemática en el sistema *mks* gravitacional son:

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{[kg \cdot s \cdot m^{-2}]}{[kg \cdot s^2 \cdot m^{-4}]} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

y en el sistema *cgs* es el stoke, es decir

$$\text{stoke} = \frac{cm^2}{s}$$

De acuerdo a la relación entre el esfuerzo cortante y la distribución de velocidades, los fluidos se pueden clasificar en ideales, newtonianos y no newtonianos. Los fluidos newtonianos se comportan según la ley lineal de esfuerzos, mientras que los no newtonianos siguen otra relación. Los fluidos ideales carecen de viscosidad.



Ejercicios

1.- Calcular el peso específico la masa específica y la densidad relativa de un aceite si el peso de 8 m^3 de este es de 5080 kg. (Res. 635 kg/m^3 , $64.73 \text{ kg s}^2/\text{m}^4$, 0.634).

2.- La viscosidad del agua a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ es de .01008 poises, calcular:

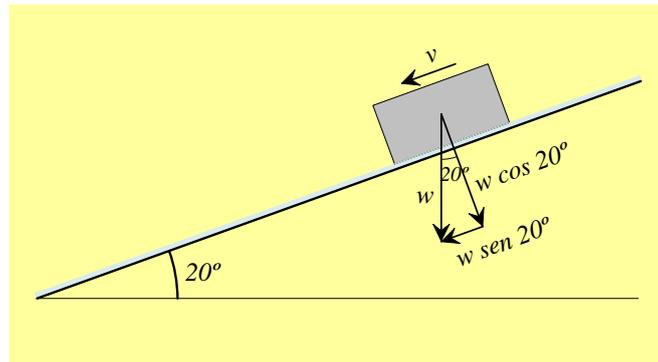
a) La viscosidad absoluta en kg s/m^2 (res. $1.028 \times 10^{-4} \text{ kg s/m}^2$)

b) El valor de la viscosidad cinemática si la densidad relativa es de 0.998. (res. $1.0093 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

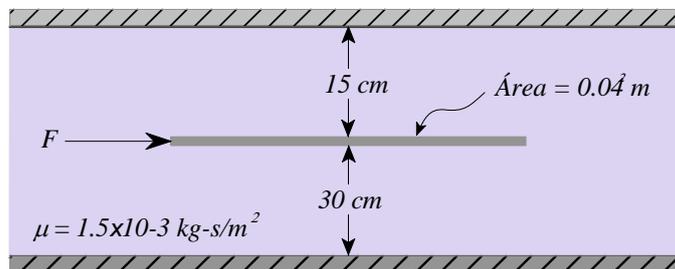
Nota: $1 \text{ poise} = 1 \text{ gr}_m / \text{cm} \cdot \text{s}$

3.- Un cilindro de 12 cm de radio gira concéntricamente en el interior de un cilindro fijo de 12.6 cm de radio. Ambos cilindros tienen una longitud de 30 cm. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los dos cilindros, si se necesita un par de 9 cm·kg para mantener una velocidad angular de 60 rev. por minuto.

- 4.- Un bloque de 10 kg de peso y 20 cm por lado se desliza hacia abajo en un plano inclinado, sobre una película de aceite con espesor de 0.005 mm. ¿Cuál será la velocidad del bloque, si se considera una distribución lineal de velocidades en el aceite?. La viscosidad dinámica del aceite es de $1.5 \times 10^{-3} \text{ kg-s/m}^2$.



- 5.- Determinar la fuerza necesaria para desplazar una placa de espesor muy pequeño a una velocidad de 0.5 m/s, con los datos indicados en la figura siguiente



- 6.- Calcular la fuerza requerida si el fluido tuviera una velocidad igual a .2 m/s en:
- la dirección de la fuerza
 - en dirección contraria a la fuerza

3. HIDROSTÁTICA

3.1 DEFINICIONES

La estática de los fluidos estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos "fluidos" en reposo. Cuando se trata solo de los líquidos se denomina "Hidrostática".

3.1.1 Presión

Se define a la presión como el resultado de una fuerza actuando sobre una superficie en dirección perpendicular a esta. Las unidades de presión son, por lo tanto, unidades de fuerza sobre unidades de superficie $[F / L^2]$.

3.1.2 Medición de la presión

La medición de la presión se hace con base en una referencia arbitraria que por lo general, es el cero absoluto (vacío total) ó la presión atmosférica local. Cuando la presión se expresa con respecto a la presión atmosférica local, se le conoce como “presión manométrica o relativa”. En cambio, cuando se mide con respecto al vacío total, se le conoce como “presión absoluta”. La relación entre estas dos es la siguiente:

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm}$$

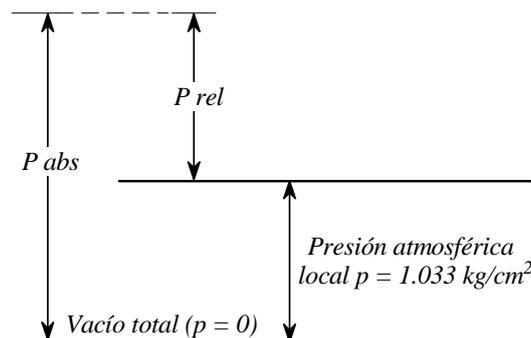
donde

P_{abs} = presión absoluta

P_{rel} = presión relativa o manométrica

P_{atm} = presión atmosférica

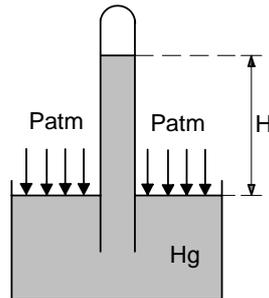
la representación gráfica de las presiones absoluta y relativa es la siguiente



3.1.3 Presión atmosférica

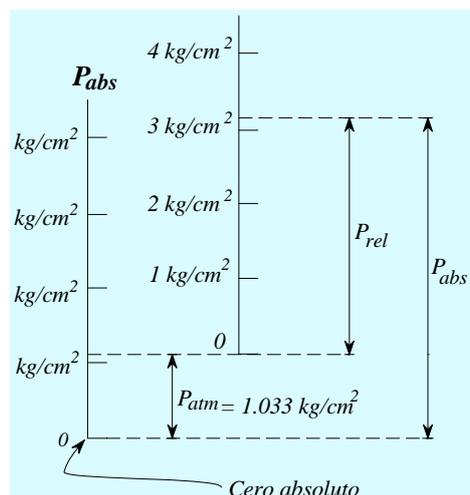
La presión atmosférica es causada por el espesor de la capa atmosférica sobre la superficie terrestre. A nivel del mar y a 20 °C, su valor es de 1.033 Kg/cm² y se le denomina atmósfera estándar.

Para medir la presión atmosférica en cualquier punto de la tierra se utiliza un barómetro. Evangelista Torricelli fue el primero en medir la presión atmosférica con el barómetro que lleva su nombre. Este aparato consiste en un tubo de cristal cerrado en uno de sus extremos lleno con mercurio e invertido sobre un recipiente que contiene también mercurio como se muestra en la figura:



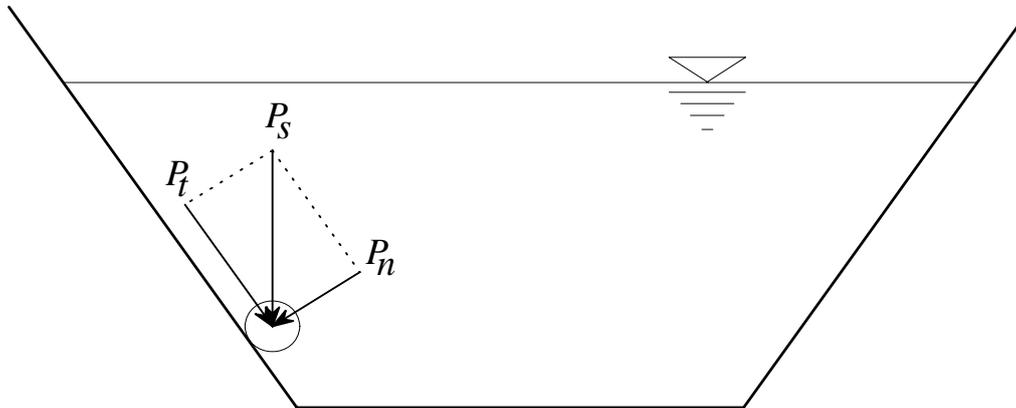
Debido a la acción de la gravedad, el mercurio desciende dentro del tubo hasta un nivel "H", medido con respecto a la superficie libre del mercurio. La fuerza debida a la presión atmosférica es por lo tanto, equivalente al peso de la columna de mercurio, que a nivel del mar alcanza una altura de 760 mm.

La relación entre la presión absoluta, relativa y atmosférica, se puede visualizar por medio del diagrama siguiente:



3.1.4 Presión sobre una superficie

La fuerza debido a la presión que ejerce un líquido en reposo sobre las paredes y el fondo del recipiente que lo contiene, se transmite a través de las partículas que están en contacto con ellas tal como se muestra en la figura.



Donde

P_s = fuerza de presión debido al peso de la partícula

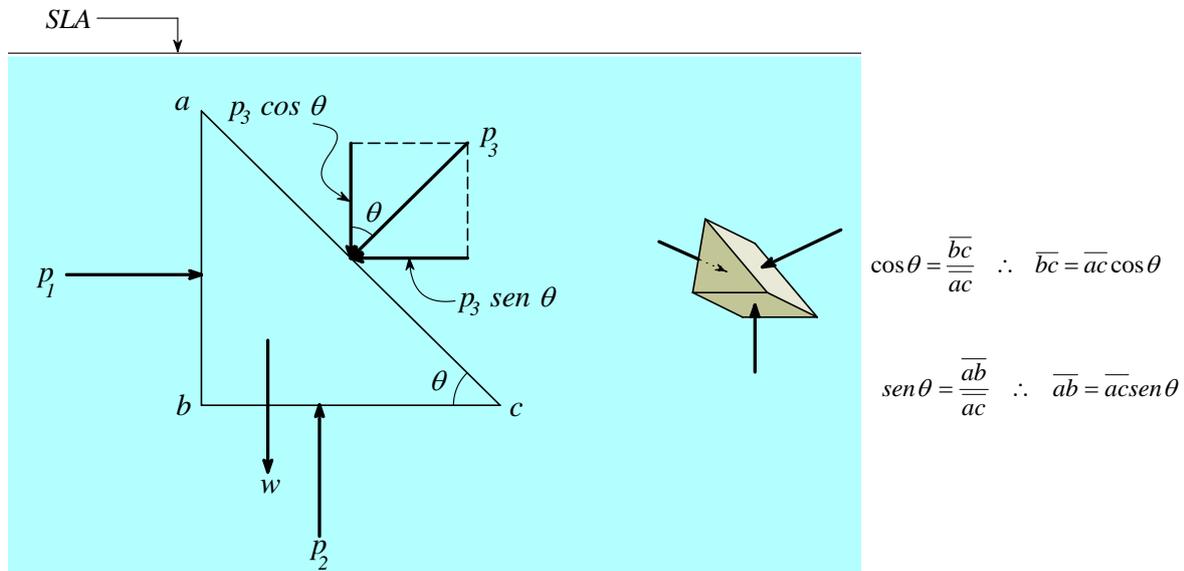
P_n = componente de P_s normal a la pared del recipiente

P_t = componente de P_s paralela a la pared del recipiente

Como el líquido está en reposo, no existe movimiento de las partículas y por lo tanto, la acción de la componente de la fuerza (P_t), paralela a la pared del recipiente, es nula; no así, la componente normal (P_n), que trata de comprimir la partícula, siendo esta la única fuerza que tiene efecto sobre la pared. De esto se puede concluir que la dirección de las fuerzas, derivadas de la presión que actúa sobre una superficie, es siempre perpendicular a estas.

3.2 Principio de Pascal

“En una masa líquida la presión en un punto tienen el mismo valor en todas las direcciones”. Esto se puede demostrar considerando una masa líquida homogénea en reposo y dentro de ella un prisma del mismo líquido, con paredes imaginarias y ancho unitario, como se muestra en la figura siguiente



Las variables p_1 , p_2 y p_3 son las fuerzas debidas a la presión que actúa sobre cada una de las caras del prisma y el ángulo de la cara inclinada del prisma, con respecto al plano horizontal es θ .

Partiendo de la definición de esfuerzo se definen las fuerzas p_1 , p_2 y p_3 , es decir

$$p_i = \frac{F_i}{A_i} \quad \therefore \quad F_i = p_i A_i$$

donde $i = 1, 2$ ó 3 .

Como el líquido está en reposo, el sistema de fuerzas debe de estar equilibrado y por lo tanto, la suma de fuerzas en todas las direcciones, debe ser igual a cero. Para la dirección horizontal, se tiene

$$\sum F_H = p_1 \cdot \overline{ab} \cdot 1 - p_2 \text{sen} \theta \cdot \overline{ac} \cdot 1 = 0$$

pero $\overline{ac} \cdot \text{sen} \theta = \overline{ab}$ entonces, sustituyendo se tiene que

$$p_1 \cdot \overline{ab} \cdot 1 - p_2 \cdot \overline{ab} \cdot 1 = 0 \quad \therefore \quad p_1 = p_2$$

Para la dirección vertical

$$\sum F_V = -p_2 \cos \theta \cdot \overline{ac} \cdot 1 - w + p_3 \cdot \overline{bc} \cdot 1 = 0$$

pero como

$$w = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{ab}}{2} \cdot 1 \cdot \gamma \quad \text{además} \quad \overline{ac} \cdot \cos \theta = \overline{ab}$$

sustituyendo

$$p_2 \cdot \overline{bc} + \frac{\overline{bc} \cdot \overline{ab}}{2} \gamma - p_3 \cdot \overline{bc} = 0$$

por lo tanto

$$p_2 + \frac{\overline{ab}}{2} \gamma - p_3 = 0$$

En el límite

$$\lim_{\overline{ab} \rightarrow 0} \left(p_2 + \frac{\overline{ab}}{2} \gamma - p_3 \right) = 0 \quad \therefore \quad p_2 = p_3$$

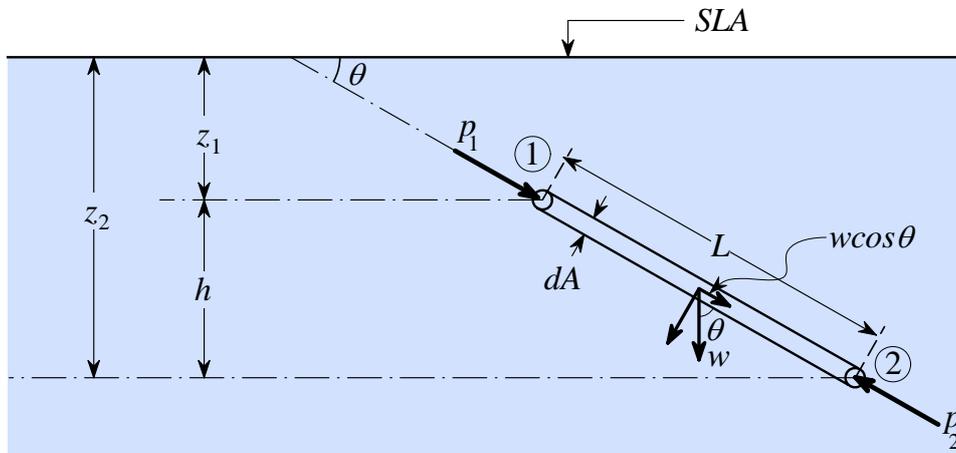
entonces,

$$p_1 = p_2 = p_3$$

Esto quiere decir que si se hacen tender las dimensiones del prisma a cero, en el límite este se convierte en un punto y por lo tanto p_1 , p_2 , y p_3 son iguales en cualquier dirección.

3.3 Presión hidrostática

Considérense dos puntos en una masa líquida homogénea en reposo, situados a las profundidades z_1 y z_2 respectivamente, tal como se muestra en la figura siguiente



La diferencia de profundidades se define como h . Supóngase que en los puntos 1 y 2 se encuentran las bases de una región cilíndrica dentro del líquido. El área de estas es de magnitud diferencial (dA) y la longitud del cilindro es L . El peso del cilindro (w) actúa en el centro de gravedad de este y sobre las bases actúan las presiones p_1 y p_2 .

Como el líquido está en reposo, la suma de las fuerzas, en cualquier dirección, debe ser igual a cero. En la dirección del eje del cilindro se tiene que

$$p_2 dA - w \cos \theta - p_1 dA = 0$$

pero como

$$w = L dA \gamma$$

entonces

$$p_2 dA - L dA \gamma \cos \theta - p_1 dA = 0$$

También de la figura se observa que

$$h = L \cos \theta$$

por lo tanto, al sustituir se obtiene la siguiente expresión

$$p_2 - h\gamma - p_1 = 0$$

Entonces, al reagrupar se obtiene

$$p_2 - p_1 = h\gamma$$

Esta expresión indica que la diferencia de presiones entre 2 puntos, dentro de una masa líquida, homogénea en reposo, es igual al producto del peso específico del líquido por la diferencia de profundidades a que se encuentran los puntos. Este es el principio fundamental de la hidrostática

Ahora bien, si los puntos están en un plano horizontal, entonces

$$h = z_2 - z_1 = 0$$

y por lo tanto

$$p_2 = p_1$$

Esto significa que las presiones en un plano horizontal de un líquido homogéneo, en reposo, tienen el mismo valor.

Ahora bien, si el punto 1 está localizado sobre la superficie libre del agua (*SLA*), entonces $z_1 = 0$ y por lo tanto la presión en ese punto corresponde a la atmosférica. Si se trabaja con presiones relativas, entonces $p_1 = 0$ y la presión en 2 queda expresada de la siguiente forma

$$p_2 = z_2 \gamma$$

En este caso $h = z_2$, por lo tanto

$$p_2 = \gamma h$$

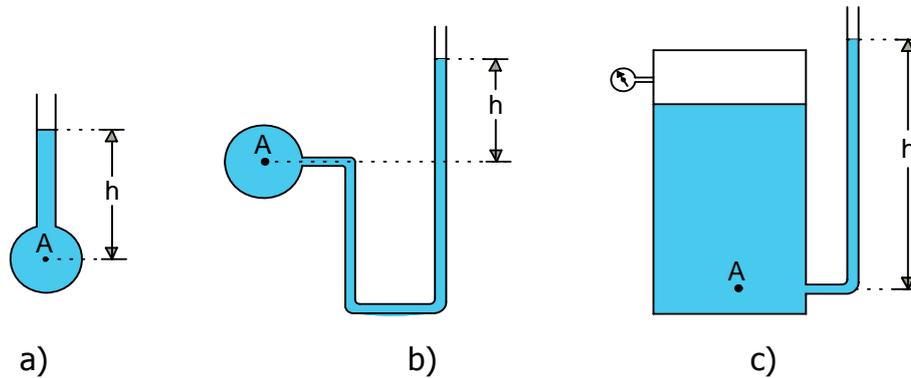
En general, para cualquier punto situado dentro de una masa líquida, homogénea y en reposo, la presión hidrostática es igual al producto del peso específico por la profundidad a que se encuentra dicho punto, es decir

$$p = \gamma h$$

Como el peso específico del líquido no varía, se concluye que la presión hidrostática en un punto solamente varía con la profundidad.

3.4 Manómetros

Son dispositivos que emplean una columna líquida para medir la presión. El manómetro más elemental consiste en un tubo conectado a un recipiente o tubería a presión con uno de sus extremos expuesto a la atmósfera como se muestra en las figuras siguientes

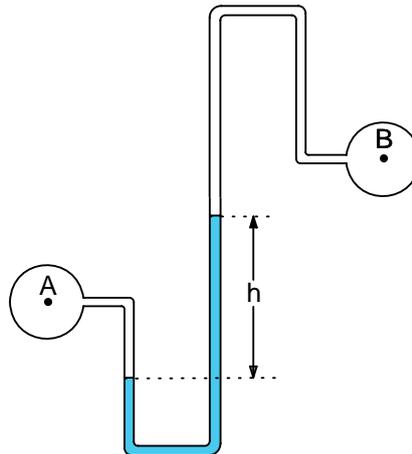


Este tipo de manómetros se conocen generalmente como *piezómetros* y miden la presión en función de la altura de la columna h . Por ejemplo, la presión en el punto A de la figura (a) es igual a

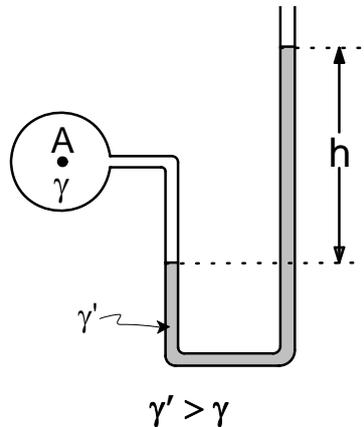
$$p_A = \gamma h$$

donde γ es el peso específico del líquido a presión.

Cuando se requiere conocer la diferencia de presiones entre dos puntos se utiliza un “*manómetro diferencial*” que no es más que un tubo que conecta dos recipientes ó tuberías, como se muestra en la figura siguiente



Otro tipo de manómetros son los denominados “*manómetros abiertos*” que son similares a los piezómetros pero difieren de estos en que contienen un líquido de mayor peso específico que el del líquido a presión como se muestra en la figura.



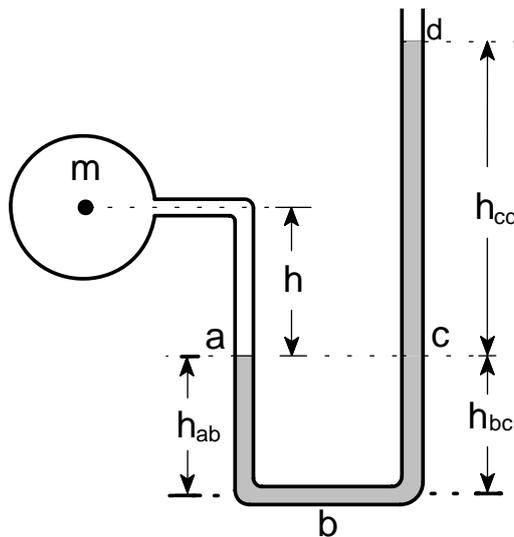
Método de cálculo

Para calcular la presión de un manómetro abierto o diferencial, se pueden utilizar dos procedimientos: uno consiste en igualar con cero la suma de todas las presiones a lo largo del manómetro y el otro en igualar las presiones en puntos convenientes.

1.- Suma de presiones

a) Manómetro abierto

Se suman las presiones que se generan a lo largo del manómetro, teniendo en cuenta su signo. Si realiza la suma desde el punto m hasta el punto d de la figura siguiente, se tiene que las presiones contrarias a esta dirección son negativas, es decir



$$p_m + h_{ma}\gamma + h_{ab}\gamma' - h_{bc}\gamma' - h_{cd}\gamma' = 0$$

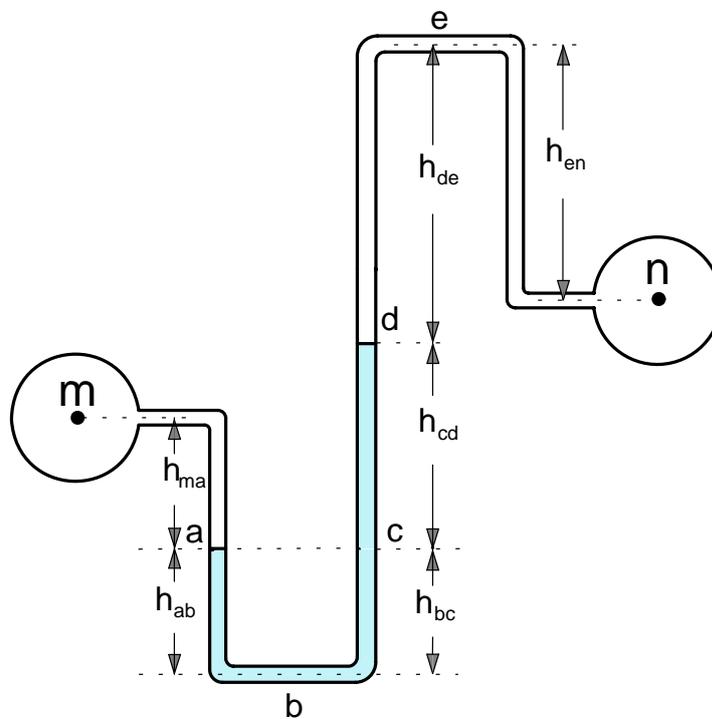
o bien

$$p_m = h_{dc}\gamma' - h_{ma}\gamma$$

donde, γ' es el peso específico de líquido manométrico.

b) Manómetro diferencial

En este caso la suma de presiones se realiza desde el punto m al punto n que se muestran en la figura siguiente



$$p_m + \gamma h_{ma} + \cancel{\gamma' h_{ab}} - \cancel{\gamma' h_{bc}} - \gamma' h_{cd} - \gamma h_{de} + \gamma h_{en} - p_n = 0$$

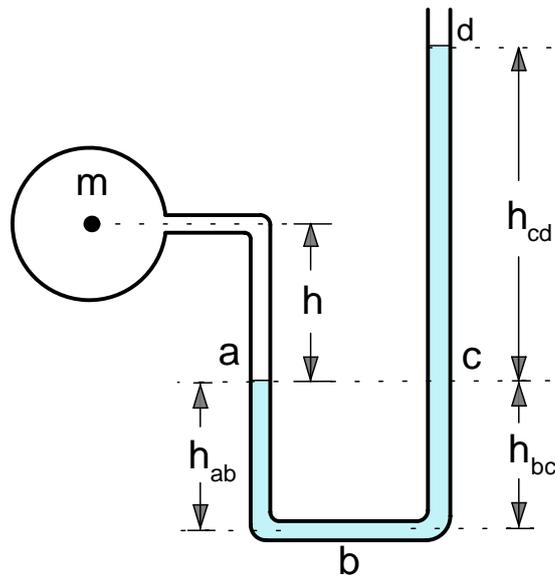
por lo que

$$p_m - p_n = -\gamma h_{ma} + \gamma' h_{cd} + \gamma h_{de} - \gamma h_{en}$$

2.- Igualación de presiones

a) Manómetro abierto

Igualando las presiones en los puntos a y b de la figura siguiente



se tiene que

$$p_a = p_c$$

Entonces

$$p_a = p_m + \gamma h_{ma} \quad \text{y} \quad p_c = \gamma h_{cd}$$

igualando

$$p_m + \gamma h_{ma} = \gamma h_{cd}$$

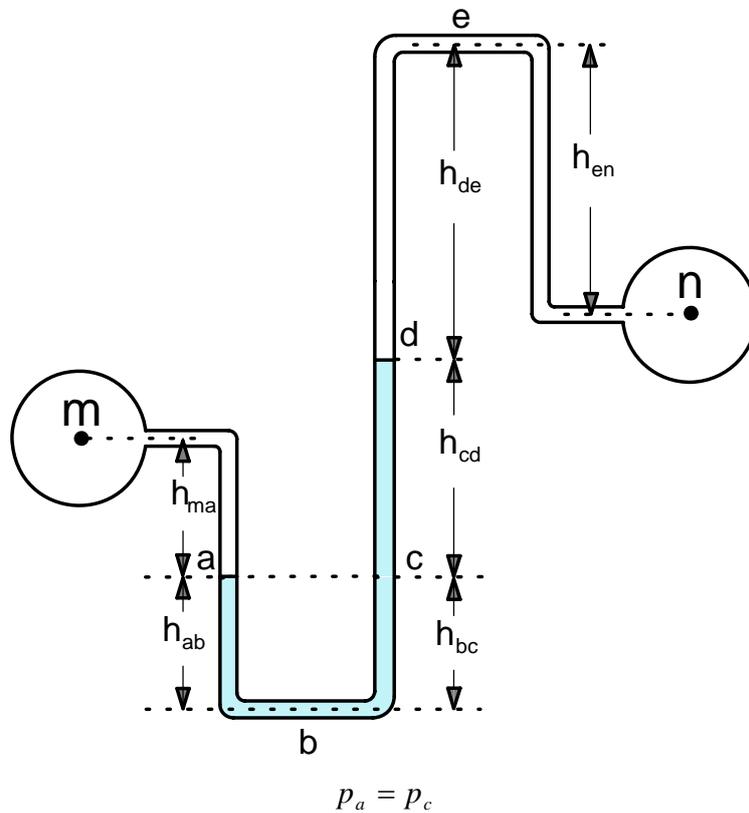
y despejando

$$p_m = \gamma h_{cd} - \gamma h_{ma}$$

que es igual al resultado obtenido con el otro método.

b) Manómetro diferencial

Igualando las presiones en los puntos a y c de la figura siguiente, se tiene



es decir

$$p_a = p_m + \gamma h_{ma} \quad \text{y} \quad p_c = p_n - \gamma h_{en} + \gamma h_{de} + \gamma' h_{dc}$$

igualando

$$p_m + \gamma h_{ma} = p_n - \gamma h_{en} + \gamma h_{de} + \gamma' h_{dc}$$

por lo que

$$p_m - p_n = -\gamma h_{ma} - \gamma h_{en} + \gamma h_{de} + \gamma' h_{dc}$$

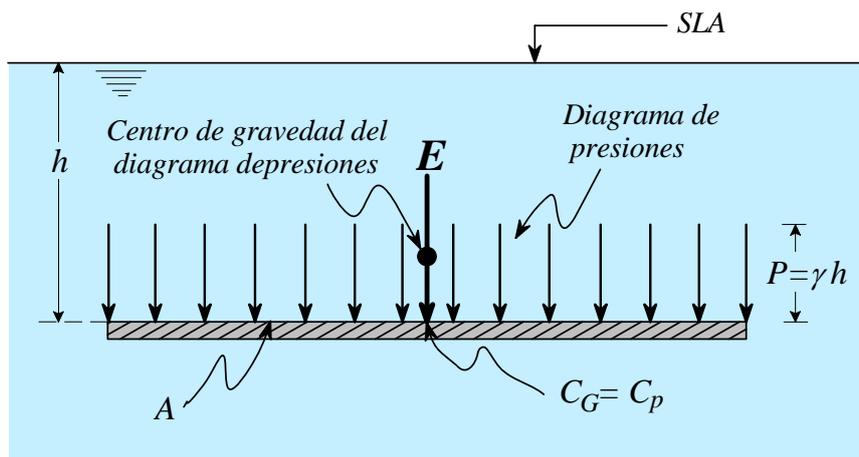
que es igual a la expresión obtenida con el primer método.

3.5 Empuje hidrostático

El empuje hidrostático es la fuerza que resulta de la acción de la presión sobre una superficie. Para facilitar su estudio, se hace la distinción entre empuje sobre superficies planas y curvas.

3.5.1 Superficies Planas

Una superficie plana de área “ A ”, colocada horizontalmente a una profundidad “ h ” en el seno de un líquido, está sujeta a una presión hidrostática ($p = \gamma h$) constante en toda la extensión de su área. Esta presión se puede representar como un conjunto de fuerzas distribuidas uniformemente en toda el área. A esta representación se le conoce como “*diagrama o cuña de presiones*”, tal como se muestra en la figura siguiente



El efecto de la presión hidrostática se puede representar con una fuerza equivalente, llamada “*Empuje (E)*”, la cual se define como

$$E = p A$$

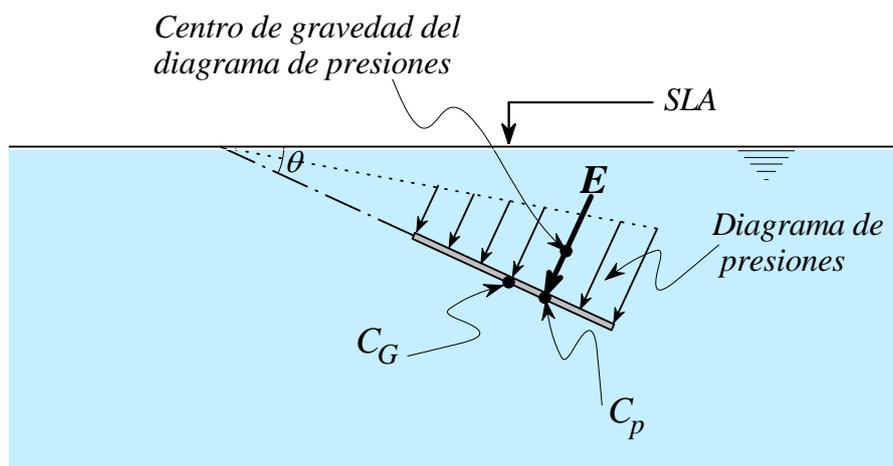
donde p es la presión hidrostática. Si se sustituye la expresión que define la presión hidrostática, se tiene

$$E = \gamma h A$$

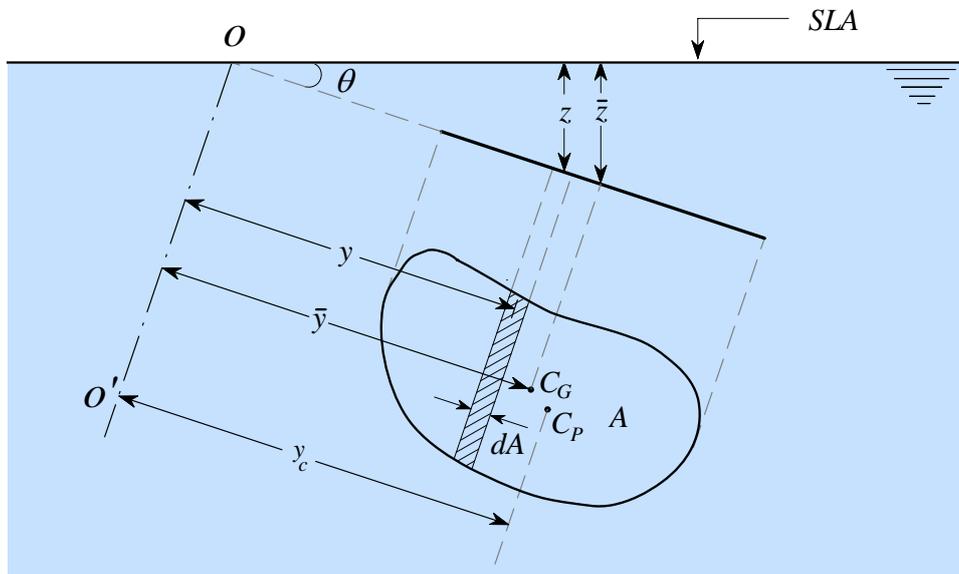
En este caso particular, el centro de presiones (C_P), que se alinea con el centro de gravedad del diagrama de presiones, coincide con el centro de gravedad (C_G), de la superficie horizontal.

Nótese que el producto hA es igual al volumen de la cuña de presiones y que al multiplicar por el peso específico del líquido se obtiene el peso de esta cuña. Por lo tanto, se puede decir que el empuje es equivalente al peso de la cuña de presiones.

Cuando la superficie plana sumergida en el seno de un líquido se coloca en una posición diferente a la horizontal, las presiones que actúan sobre ella no tienen el mismo valor en todos sus puntos, ya que son mayores en los puntos de mayor profundidad. En este caso, el diagrama de presiones es como se muestra en la figura siguiente



En este caso el empuje, pasa por el centro de gravedad del diagrama de presiones pero no coincide con el centro de gravedad de la superficie plana (C_G), sino que se aplica en un punto diferente al que se le conoce como *centro de presiones* (C_P). La magnitud del empuje y posición del centro de presiones, se pueden calcular de la siguiente manera: Supóngase una superficie plana en una posición cualquiera en el interior de una masa líquida, en reposo, como se muestra en la siguiente figura.



La superficie está contenida en un plano imaginario que intercepta la superficie libre del agua (*SLA*) a un ángulo θ y forma la traza oo' .

Sobre una pequeña franja de área diferencial dA , situada a una profundidad z , la presión hidrostática es igual a

$$p = \gamma z$$

Así mismo, la presión debida a un empuje diferencial dE , sobre la franja es igual a

$$p = \frac{dE}{dA}$$

Igualando estas dos expresiones y despejando dE , se tiene

$$dE = p dA = \gamma z dA$$

Para calcular el empuje sobre toda el área de la superficie se integra de la forma siguiente

$$E = \int_A \gamma z dA$$

Por otro lado, de la figura se observa que

$$\text{sen}\theta = \frac{z}{y} \quad \therefore \quad z = y \text{ sen}\theta$$

Al sustituir el valor de z en la integral, se tiene

$$E = \int_A \gamma y \text{ sen}\theta \, dA = \gamma \text{ sen}\theta \int_A y \, dA$$

Pero el valor $\int_A y \, dA$ es el momento estático de la superficie considerada con respecto al eje OO' , por lo tanto

$$\int_A y \, dA = M_o = \bar{y} A$$

volviendo a sustituir en la ecuación del empuje, se obtiene lo siguiente

$$E = \gamma \text{ sen}\theta \bar{y} A$$

Al referirse de nuevo a la figura anterior, se puede observar que la profundidad al centro de gravedad de la superficie, se puede expresara como

$$\bar{z} = \bar{y} \text{ sen}\theta$$

Entonces, al sustituir en la expresión del empuje, se obtiene lo siguiente

$$E = \gamma \bar{z} A$$

o bien

$$E = \bar{p} A$$

Esta expresión indica que el empuje sobre una superficie plana cualquiera, es igual a la presión sobre el centro de gravedad, multiplicada por el área de la superficie.

La posición del centro de presiones (donde se aplica el empuje) se calcula considerando el momento estático de la superficie libre con respecto a la traza oo' , es decir

$$dM = y dE = y \gamma z \, dA$$

integrando ambos lados de la ecuación, se tiene

$$M = \int y \gamma z dA = \int y \gamma y \text{sen} \theta dA = \gamma \text{sen} \theta \int y^2 dA$$

pero también el momento de la resultante (el empuje) se calcula como

$$M = y_{cp} E = y_{cp} \int dE = y_{cp} \int \gamma z dA = y_{cp} \int \gamma y \text{sen} \theta dA = y_{cp} \gamma \text{sen} \theta \int y dA$$

igualando estas dos ecuaciones, se tiene

$$\cancel{\gamma \text{sen} \theta} \int y^2 dA = y_{cp} \cancel{\gamma \text{sen} \theta} \int y dA$$

$$y_{cp} = \frac{\int y^2 dA}{\int y dA}$$

pero $\int y^2 dA$ y $\int y dA$ son los momentos de inercia ($I_{oo'}$) y estático ($M_{oo'}$) de la superficie

A con respecto a la traza oo' , respectivamente, es decir

$$y_{cp} = \frac{I_{oo'}}{M_{oo'}}$$

donde

$$I_{oo'} = \int y^2 dA \quad \text{y también} \quad M_{oo'} = \int y dA = A \bar{y}$$

A partir del teorema de Steiner o de los ejes paralelos

$$I_{oo'} = I_G + A \bar{y}^2$$

sustituyendo, se tiene

$$y_{cp} = \frac{I_G + A \bar{y}^2}{A \bar{y}}$$

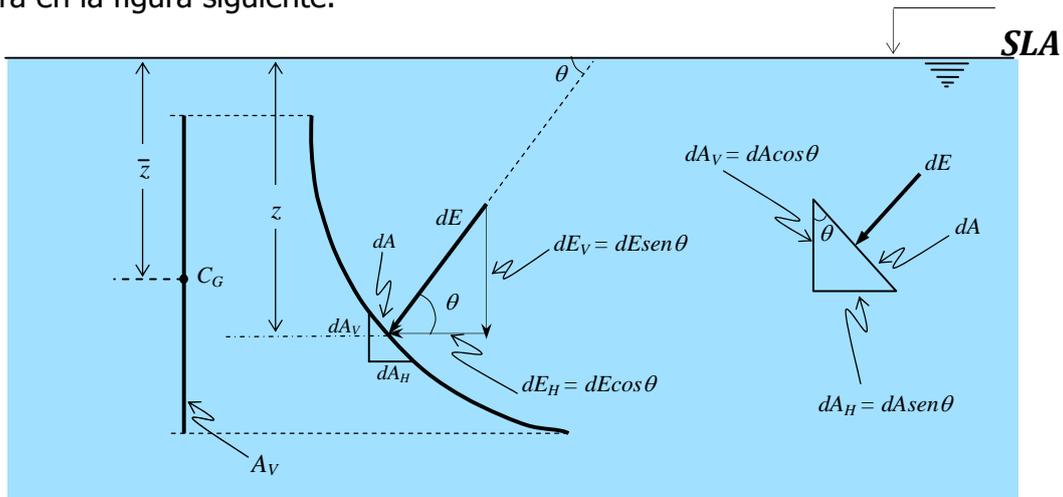
o bien

$$y_{cp} = \frac{I_G}{A \bar{y}} + \bar{y}$$

en donde I_G es el *momento de inercia con respecto al centro de gravedad* de la superficie

3.5.2 Superficies Curvas

Considérese una superficie curva en el seno de una masa líquida como el que se muestra en la figura siguiente.



Si se analiza un área diferencial dA de esta superficie, situada a una profundidad z , se observa que está sujeta a un empuje diferencial igual a

$$dE = \gamma z dA$$

La línea de acción de este empuje forma un ángulo θ con respecto a la superficie libre del agua. Así mismo, este se puede expresar en función de sus componentes ortogonales dE_H y dE_V , que se definen como

$$dE_H = dE \cos \theta = \gamma z dA \cos \theta = \gamma z dA_V$$

$$dE_V = dE \sin \theta = \gamma z dA \sin \theta = \gamma z dA_H$$

La componente horizontal del empuje E_H se obtiene integrando dE_H , es decir

$$\int_A dE_H = \int_A \gamma z dA_V = \gamma \int_A z dA_V = E_H$$

El producto $z dA_V$ es el momento estático de la proyección vertical del área diferencial dA con respecto a la superficie libre del agua. Integrando se obtiene

$$\int_A z dA_V = \bar{z} A_V$$

que es el momento estático de la proyección vertical de la superficie curva (A_V), con respecto a la superficie libre del agua. Sustituyendo en la expresión del empuje, se tiene

$$E_H = \gamma \bar{z} A_V$$

Esto significa que la componente horizontal del empuje se puede calcular, simplemente, multiplicando la proyección vertical del superficie (A_V) por la profundidad de su centro de gravedad (\bar{z}) y el peso específico (γ) del líquido en que se encuentre sumergida.

Para el cálculo de la componente vertical del empuje, se integra la ecuación de la componente vertical del empuje, es decir

$$\int_A dE_V = \gamma \int_A z dA_H = E_V$$

Al integrar el producto $z dA_H$ en toda el área, se obtiene volumen del líquido colocado sobre la superficie considerada, es decir

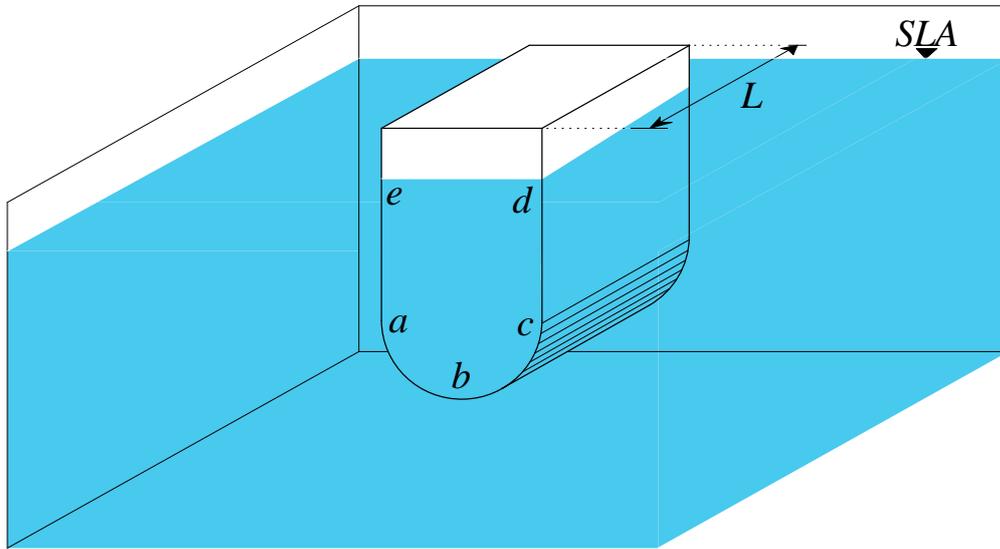
$$\int_A z dA_H = Vol$$

por lo tanto,

$$E_V = \gamma Vol$$

Como el producto γVol corresponde a un peso, se concluye que la componente vertical del empuje sobre la superficie curva es igual al peso del líquido encima superficie. Esto se cumple aún cuando no haya líquido encima de la superficie. Por ejemplo, la componente vertical del empuje sobre la superficie abc del cuerpo sumergido mostrado en la figura siguiente, es

$$E_V = \gamma A_{abcd} L$$



Donde A_{abcd} es el área lateral del cuerpo y L es el ancho.

La posición de la componente horizontal del empuje se calcula considerando el momento del empuje horizontal con respecto a la superficie libre. Para el diferencial de dicho empuje, se tiene

$$dM = dE_H z$$

integrando

$$M = \int dM = \int dE_H z = \int_A \gamma z dA_V z = \gamma \int_A z^2 dA_V$$

Este momento también se puede calcular multiplicando la componente horizontal del empuje total (E_H) por la distancia del centro de presiones a la superficie libre del agua, es decir

$$M = E_H y_{cp} = y_{cp} \int dE_H = y_{cp} \int_A \gamma z dA_V = \gamma y_{cp} \int_A z dA_V$$

igualando las dos expresiones

$$\gamma \int_A z^2 dA_V = \gamma y_{cp} \int_A z dA_V$$

entonces

$$y_{cp} = \frac{\int_A z^2 dA_V}{\int_A z dA_V} = \frac{I_{AV}}{Q_{AV}}$$

donde I_{AV} es el momento de inercia de la proyección vertical de la superficie (A_V) y Q_{AV} es el momento estático de esta proyección, con respecto a la superficie libre del líquido.

El empuje total sobre la superficie curva se obtiene de la siguiente manera

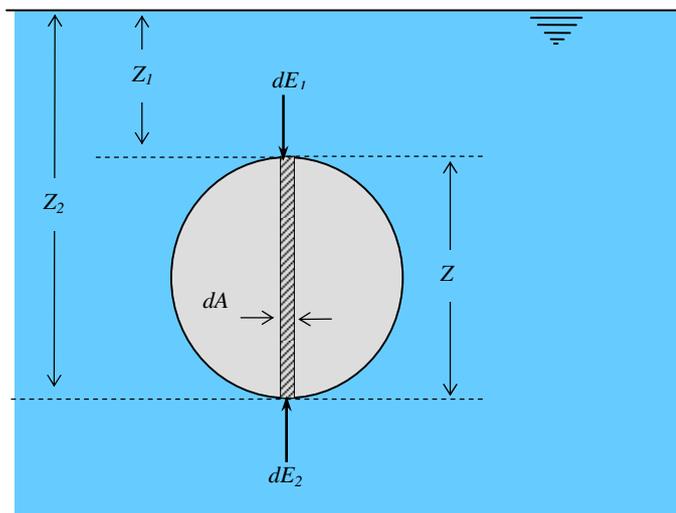
$$E = \sqrt{E_H^2 + E_V^2}$$

3.6 Flotación

3.6.1 Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido recibe un empuje hacia arriba igual al peso del volumen del líquido desplazado. La línea de acción de este empuje coincide con el centro de gravedad del volumen desplazado.

Una demostración sencilla de este principio se puede efectuar considerando un cuerpo sumergido en un líquido, como se muestra en la figura siguiente



Se puede considerar que el cuerpo está formado por una gran cantidad de prismas de sección diferencial dA y altura z .

Analizando un prisma separadamente, se puede observar que sobre las bases, situadas a profundidades z_1 y z_2 , están actuando los empujes diferenciales dE_1 y dE_2 , respectivamente, cuyo valor se define como

$$dE_1 = \gamma z_1 dA \quad \text{y} \quad dE_2 = \gamma z_2 dA$$

la resultante de estos empujes es entonces,

$$dE = \gamma dA (z_2 - z_1)$$

donde el producto $dA(z_2 - z_1)$ es el volumen del líquido desalojado por el prisma. Si se multiplica este volumen por el peso específico del líquido γ , se obtiene el peso del mismo. Integrando sobre todo el cuerpo, se obtiene el volumen total, es decir

$$E = \int dE_v = \int \gamma dA (z_2 - z_1) = \gamma \int dVol$$

por lo tanto

$$E = \gamma Vol$$

Como el empuje es mayor en las bases inferiores de los prismas, la resultante tiene dirección hacia arriba.

4. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Antes de empezar a estudiar las ecuaciones fundamentales de la hidráulica, es importante tener el conocimiento de algunos conceptos que están relacionados con el agua en movimiento, a la cual se le denomina "CINEMÁTICA DE LOS FLUIDOS", la cual estudia el movimiento de sus partículas sin considerar las causas que lo producen, a través de magnitudes físicas tales como velocidad, aceleración y rotación.

4.1 DEFINICIONES

4.1.1 Velocidad de una partícula fluida.- se define como la rapidez con la que ocurre un cambio en la posición de la partícula.

Si la partícula p_0 de la figura siguiente se desplaza siguiendo la trayectoria c , descrita en cada instante por el vector de posición $\vec{r} = \vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, entonces la velocidad queda definida por la expresión

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

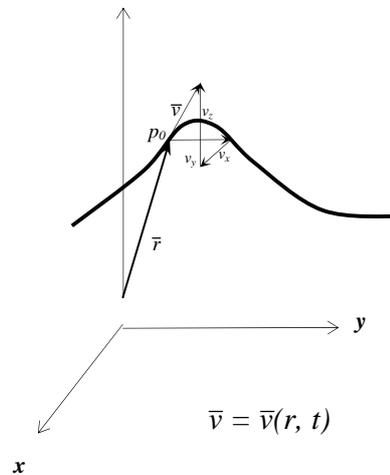
donde $d\vec{r}$ representa el vector diferencial de arco sobre la curva que recorre la partícula en el tiempo dt . La velocidad es entonces un campo vectorial dentro de un flujo y al seguir la partícula la trayectoria c , es un vector tangente en cada punto de la misma y en general depende de la posición y el tiempo $v = v(r, t)$.

La velocidad se puede describir en términos de sus componentes, según la dirección de los ejes coordenados, de la siguiente forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Dichas componentes son funciones de la posición de la partícula y del tiempo, es decir

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t) \\ v_y &= v_y(x, y, z, t) \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned}$$



Puesto que la magnitud del vector diferencial de r es

$$|d\vec{r}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

y entonces la magnitud de la velocidad es

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Si s representa un vector unitario tangente en cada punto a la trayectoria de la partícula y es función del desplazamiento S , la velocidad también se puede expresar como

$$v = \frac{ds}{dt} \bar{s} = \frac{ds}{dt}$$

donde $d\bar{s}$ se conoce como el vector diferencial de arco y vale $ds \cdot \bar{s}$

4.1.2 Aceleración de una partícula fluida.-se define como la variación de la velocidad. Esta variación se puede dar en el tiempo o en el espacio. Si ocurre en el tiempo se define como *aceleración local* y se expresa como

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Cuando la velocidad varía de un punto a otro en un instante fijo en el tiempo, se define como *aceleración convectiva*, es decir

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{ds}$$

donde ds representa el espacio.

En función de las coordenadas cartesianas se tiene

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{ds} = \frac{dv_x}{dx} \hat{i} + \frac{dv_y}{dy} \hat{j} + \frac{dv_z}{dz} \hat{k}$$

4.2 CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS

De acuerdo al movimiento característico de las partículas fluidas, los fluidos se pueden clasificar en los siguientes tipos:

4.2.1. Flujo permanente.- es aquel en que las propiedades del fluido (densidad, presión, temperatura, etc.) y las condiciones de movimiento (velocidad) no cambian en el tiempo, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Se puede considerar flujo permanente, si la variación del valor sus características físicas y de movimiento es pequeña, es decir que se desvíe poco de los valores promedio.

4.2.2. Flujo no permanente.-es aquel en que las características físicas y las condiciones de movimiento cambian de un instante a otro.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$$

4.2.3. Flujo uniforme.- se presenta cuando no existe variación de la velocidad en el espacio, es decir

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

donde s es un sistema de coordenadas espaciales, tal como, el sistema cartesiano (x, y, z)

4.2.4. Flujo no uniforme.- se presenta cuando existen variaciones de la velocidad de un punto a otro en el espacio, es decir

$$\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0$$

4.2.5.- Flujo irrotacional.- se presenta cuando no existe rotación entre las partículas del fluido, es decir

$$rot \ v = 0$$

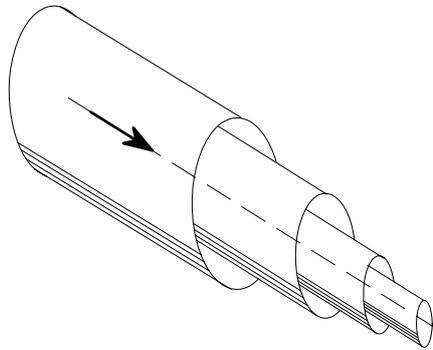
4.2.6. Flujo rotacional.- es aquel donde del rotacional adquiere un valor diferente de cero, es decir

$$rot \ v \neq 0$$

Si la relación espacial entra partículas no cambia, aunque el movimiento se produzca sobre una trayectoria curva, el flujo es irrotacional, tal como se muestra en la figura siguiente.

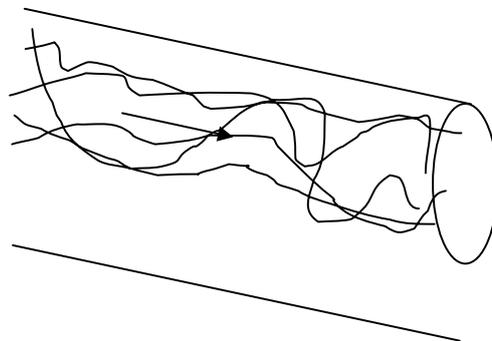
4.2.7.- Flujo Laminar.- se distingue por que el movimiento se realiza a través de trayectorias separadas y bien definidas sin que existan cruces o mezclas.. En un conducto circular, el flujo se desplaza en forma de cilindros concéntricos. Si se inyecta tinta en un punto del flujo, de manera continua, se observa que se forma un hilo a todo

lo largo del conducto. Si al mismo tiempo se inyecta tinta en otro punto, se formará otro hilo. Entonces se puede imaginar que en este caso, el flujo se da a manera de desplazamientos de cilindros concéntricos como se muestra en la figura siguiente.



En una placa, el flujo laminar daría como una serie de planos paralelos a la placa.

4.2.8.- Flujo turbulento.- es el más común, no presenta trayectorias ordenadas bien definidas pero las partículas se desplazan en dirección general al movimiento, como se muestra en la figura siguiente.



4.2.9.-Flujo incompresible.- se presenta cuando los cambios de densidad de un punto a otro son muy pequeños y despreciables. Los líquidos y los gases a bajas velocidades, pueden considerarse incompresibles.

4.2.10.- Flujo compresible.- ocurre cuando los cambio de densidad del fluido son considerables, el aire es un flujo altamente compresible.

4.3 CONCEPTO DE GASTO O CAUDAL

Cuando se observa el agua que pasa por un río o se imagina la que pasa por una tubería, el primer cuestionamiento que suele formularse, es acerca de la cantidad de agua que pasa por ese conducto. Esta idea de cantidad de agua conducida tiene un significado integral ya que implica el conocimiento del movimiento en conjunto de las partículas que constituyen la masa del fluido. Sin embargo, para poder comparar o hacer estimaciones, es necesario referir esta cantidad de materia en movimiento al tiempo, definiéndose de esta manera, el concepto de *gasto o caudal* como la cantidad de materia o masa que atraviesa un lugar en cierta unidad de tiempo. En el caso de los líquidos, los cuales se consideran prácticamente incompresibles, la cantidad de materia se puede indicar como el volumen. Entonces, el gasto se define como el volumen que pasa por un punto en el espacio, en un determinado tiempo, es decir

$$Q = \frac{Vol}{t}$$

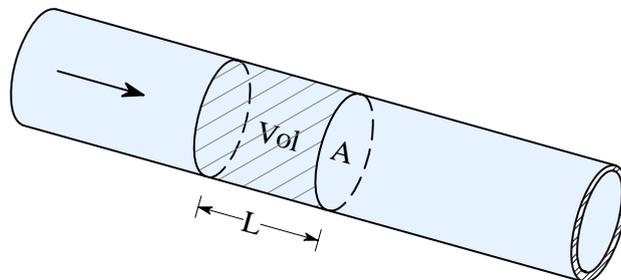
donde

$$Q = \text{gasto o caudal} \left[\frac{L^3}{t} \right]$$

$$Vol = \text{volumen} [L^3]$$

$$t = \text{tiempo} [t]$$

En un sistema unidimensional se puede tener una expresión para el gasto, considerando por ejemplo, la sección transversal de un tramo de un conducto de área A por el cual pasa un volumen Vol como se muestra en la figura:



Como el volumen se define como $Vol = AL$, entonces al sustituir en la expresión del gasto, se tiene

$$Q = \frac{AL}{t}$$

pero como

$$V = \frac{L}{t}$$

donde v es la velocidad con que se mueve la masa o el volumen. Entonces

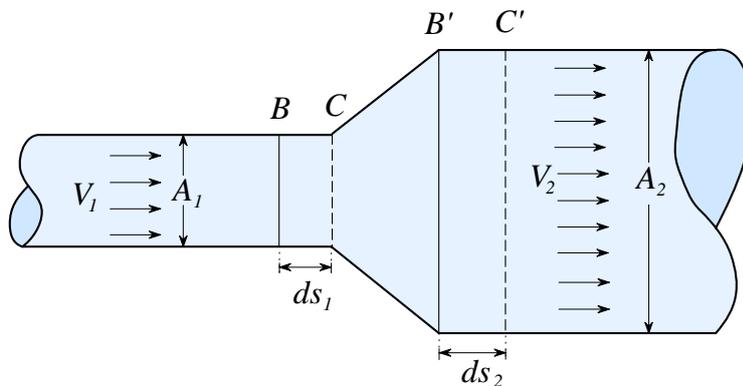
$$Q = VA$$

que es la expresión que define el gasto o caudal que circula en un conducto en una dirección dada.

4.4 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD O LEY DE CASTELLI

4.4.1 Flujo unidimensional

En la mecánica de los fluidos se considera que la cantidad de masa es invariable con respecto al estado de movimiento. Sobre esta consideración se basa en la ecuación de la continuidad, propuesta de tal forma por Benedetto Castelli, estableciéndose entonces que la materia fluida no puede ser creada ni destruida por ningún proceso hidrodinámico. Una demostración objetiva de este principio se puede lograr considerando un conducto como el que se muestra en la figura siguiente



A través de este conducto pasa un fluido incompresible de la región 1, que tiene un área transversal A_1 a la región 2 con área transversal A_2 . Como A_1 y A_2 son diferentes, las velocidades V_1 y V_2 también lo son.

Si se considera el desplazamiento de la región BB' a la región CC' en un tiempo dt , entonces por el principio de la conservación de la materia, se tiene que

$$\frac{\rho_1 A_1 ds_1}{dt} = \frac{\rho_2 A_2 ds_2}{dt}$$

pero como el fluido es homogéneo e incompresibles, entonces $\rho_1 = \rho_2$ y por lo tanto esta expresión se reduce a

$$A_1 \frac{ds_1}{dt} = A_2 \frac{ds_2}{dt}$$

donde $\frac{ds_1}{dt}$ y $\frac{ds_2}{dt}$ son las velocidades medias V_1 y V_2 , respectivamente. Sustituyendo en

la expresión anterior se tiene

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

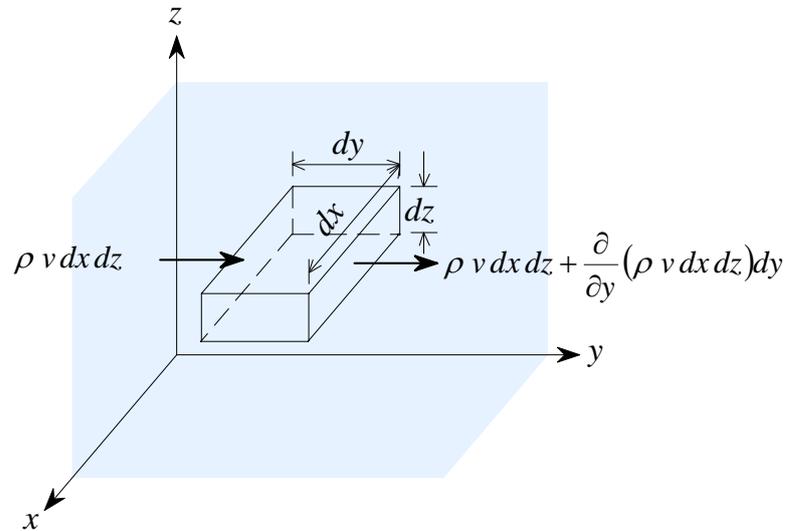
expresión que denota el principio de continuidad. Haciendo uso del concepto de gasto o caudal, ($Q = VA$) se observa que

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_n$$

Esto significa que el gasto que pasa por un conducto se mantiene constante, aun cuando existan cambios en la sección a lo largo de este.

4.4.2 Ecuación diferencial de la continuidad

Si se considera un volumen de control diferencial en un espacio tridimensional, como el que se muestra en la figura, se puede hacer un balance de la masa que atraviesa ese volumen, de la siguiente manera



Considerando las componentes de la velocidad en las direcciones x , y , z como u , v , w respectivamente, se analiza el flujo a través del prisma mostrado en la figura que tiene dimensiones dx , dy , dz . La masa de fluido que **entra** a través de una de sus caras, por ejemplo, $dx dz$, en la dirección “ y ”, por unidad de tiempo es la siguiente

$$\frac{\text{masa}}{dt} = \frac{\rho \text{ vol}}{dt} = \frac{\rho dx dz dy}{dt}$$

Pero como

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Entonces la masa será

$$\frac{\text{masa}}{dt} = \rho dx dz v$$

Por lo tanto, el flujo de masa que **sale** por la cara opuesta, según la figura, es el mismo más el cambio que pueda ocurrir en la dirección del flujo, es decir

$$\rho v dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy$$

Efectuando la diferencia entre la masa de fluido que entra y la que sale, se tiene

$$\cancel{\rho v dx dz} - \left(\cancel{\rho v dx dz} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v dx dz) dy \right) = -\frac{\partial}{\partial y} (\rho v dx dz) dy$$

Haciendo lo mismo para las otras direcciones, se obtiene lo siguiente:

Dirección x

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u dy dz) dx$$

Dirección z

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\rho w dx dy) dz$$

Para encontrar la “*masa total neta*” que entra al prisma, se suman los flujos en las tres direcciones de la manera siguiente

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u dy dz) dx - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v dx dz) dy - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w dx dy) dz =$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \rho u dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y} \rho v dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} \rho w dx dy dz =$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w \right) dx dy dz$$

Asimismo, el cambio de masa por unidad de tiempo dentro del fluido es

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho dx dy dz$$

Igualando esto con la masa total neta que entra al prisma, se obtiene lo siguiente

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w \right) dx dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \rho dx dy dz$$

Por lo tanto,

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esta es la ecuación diferencial de continuidad en tres dimensiones. En forma compacta esta ecuación se representa como

$$-\nabla \cdot \rho \mathbf{q} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Donde “ ∇ ” es un operador diferencial llamado gradiente que se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

y “ \mathbf{q} ” es el vector velocidad definido como

$$\mathbf{q} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Si el fluido es incompresible, ρ sale del operador diferencial quedando,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

o bien en la forma desarrollada,

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Por otro lado, si la densidad permanece constante con respecto al tiempo, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

o en forma compacta,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

Que es la ecuación diferencial de continuidad para flujo *permanente*.

En dos dimensiones, para en un plano horizontal, la componente vertical de la velocidad es nula, es decir,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Por lo que la ecuación de la continuidad, queda como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Finalmente en una sola dirección, por ejemplo en x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La cual corresponde al flujo “*uniforme*” en una dirección.

4.5 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

4.5.1 Ecuación General del movimiento de una partícula

De acuerdo con la “*segunda ley de Newton*”, se establece que cuando a una partícula, con masa “ m ”, se le aplica una fuerza “ F ”, se genera una aceleración “ a ”, es decir

$$F = ma$$

Esta es la ecuación general del movimiento. Si la aceleración se expresa como $\frac{dv}{dt}$, entonces se tiene que

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

AL multiplicar ambos miembros de esta expresión por un desplazamiento diferencial “ ds ”, se obtiene lo siguiente

$$Fds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv$$

Pero

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Entonces, al sustituir en la expresión anterior, se tiene que

$$Fds = m v dv$$

Al integrar ambos términos de la ecuación, es decir

$$\int_0^s Fds = \int m v dv = m \frac{v^2}{2} + C$$

El término $m \frac{v^2}{2}$ se define como la **energía cinética** y se debe exclusivamente al movimiento y la masa de la partícula. Para resolver esta ecuación es necesario definir las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{cuando } s = 0, \quad Fds = 0 \quad \text{y} \quad v = v_0$$

Donde v_0 es la velocidad inicial de la partícula, la cual no necesariamente es cero.

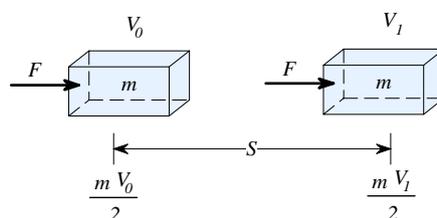
Aplicando estas condiciones a la ecuación anterior se tiene que

$$m \frac{v_0^2}{2} + C = 0, \quad \text{o bien} \quad C = -m \frac{v_0^2}{2}$$

Al sustituir nuevamente en la ecuación, se obtiene

$$\int_0^s Fds = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

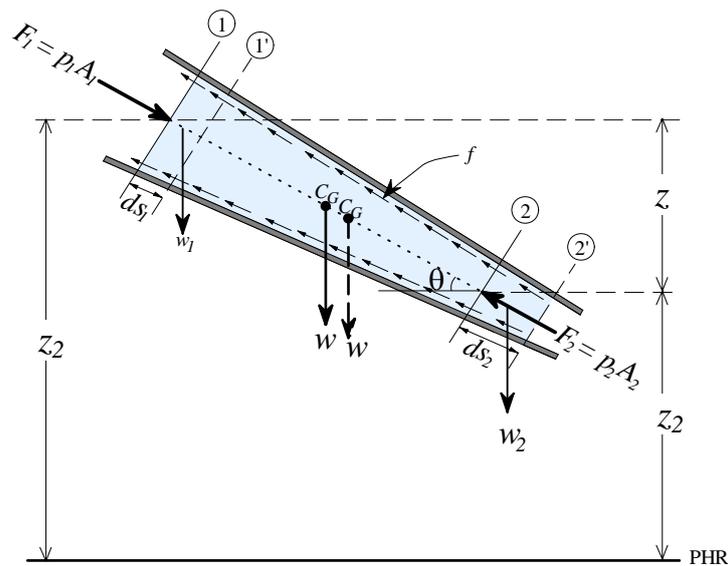
Que es la ecuación que describe el principio de la variación de la energía cinética y del trabajo, el cual se expresa de la manera siguiente: **“si a un cuerpo de masa m se le aplica una fuerza F en una distancia s , el trabajo desarrollado por esta fuerza es igual a la diferencia entre la energía cinética final y la inicial”**. En la figura siguiente se ilustra gráficamente este principio



4.5.2 Ecuación de la energía de una masa fluida

La ecuación de la energía de una masa fluida se deriva del principio de conservación de la energía, y dice que: *“la energía total en la sección de una corriente es igual a la energía total en una sección ubicada agua arriba de ésta, menos la energía consumida (transformada) entre las dos secciones”*.

Para demostrar este principio en forma simplificada, se considera un tramo de una corriente entre dos secciones transversales de una tubería, como se muestra en la figura siguiente. Los centros de las secciones, denotadas en la figura como ① y ②, está referido a un plano horizontal (PHR), colocado arbitrariamente. Con respecto a este plano, la sección ① tendrá una elevación z_1 y la sección ② una elevación z_2 , siendo la distancia vertical entre ambas secciones z , es decir, $z = z_1 - z_2$



Si las áreas de las secciones ① y ② son A_1 y A_2 , respectivamente, para un gasto constante Q , entonces las velocidades serán

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \qquad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

En la sección ① se tiene una presión p_1 y en la sección ②, p_2 . Estas presiones se manifiestan como fuerzas F_1 y F_2 de la siguiente forma

$$F_1 = p_1 A_1 \qquad F_2 = p_2 A_2$$

El peso (w) de la masa líquida comprendida entre las dos secciones, actúa en el centro de gravedad (C_G) del volumen comprendido entre dichas secciones. Si la masa líquida se desplaza una distancia diferencial (ds), de manera que pase a ocupar la posición entre las secciones (1') y (2'), desde la posición entre las secciones (1) y (2), por el principio de conservación de la masa se obtiene la siguiente igualdad de volúmenes.

$$A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Al ocurrir este desplazamiento se generan fuerzas de fricción (f) entre el líquido y las paredes del conducto.

Por otro lado, las fuerzas que actúa sobre la masa en desplazamiento, realizan un trabajo que es igual a la diferencia de la energía dinámica de la posición inicial menos la de la posición final, definida por la siguiente expresión

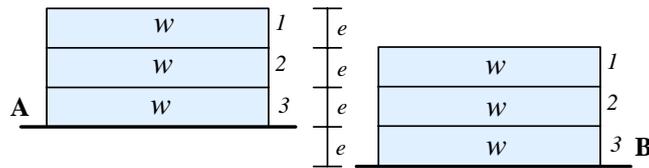
$$\int_0^s F ds = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Las diferentes fuerzas que actúan sobre el volumen considerado, generan los siguientes trabajos (δ):

- 1) F_1 , $\delta_1 = F_1 ds_1 = p_1 A_1 ds_1$ (debido a la presión en 1)
- 2) F_2 , $\delta_2 = F_2 ds_2 = p_2 A_2 ds_2$ (debido a la presión en 2)
- 3) w , $\delta_w = w_1 \text{sen} \theta s$ (debido al peso)
- 4) f , $\delta_f = f p$ (debido a la fricción)

Donde “ s ” es la distancia entre las secciones 1 y 2 y “ p ” es el perímetro interno del conducto.

El trabajo realizado por el peso se puede visualizar mediante la siguiente analogía: Imagínese un conjunto de bloques de peso w y espesor e , colocados en un plano A que se trasladado a un plano B, tal como se muestra en la siguiente figura



El trabajo desarrollado al trasladar los bloques del plano A al B es

$$\delta = 3 w e$$

Si se traslada solamente el bloque en la posición 1, sobre el plano A, a la posición 3, sobre el plano B, el trabajo realizado será

$$\delta = 3 e w$$

que es exactamente el mismo trabajo que en el caso anterior. Así entonces, resulta el mismo trabajo al desplazar toda la masa líquida de peso \$w\$ de la posición 1 - 2 a la posición 1' - 2', que desplazar la masa de peso \$w_1\$ comprendida entre 1 y 1' a la posición 2 y 2'. Como la masa en desplazamiento es constante, entonces los pesos \$w_1\$ y \$w_2\$ son iguales.

Ahora bien, de acuerdo a la figura anterior

$$w_1 = \gamma A_1 ds_1 \text{ y } \text{sen} \theta = \frac{z}{s} = \frac{z_1 - z_2}{s}$$

Por lo tanto

$$\delta_w = w_1 \text{sen} \theta s = \gamma A_1 ds_1 \frac{z_2 - z_1}{s} s = \gamma A_1 ds_1 (z_1 - z_2)$$

El trabajo realizado por las fuerzas de fricción (\$\delta_f\$) se dejará solamente indicado, ya que analizará posteriormente en otro tema.

Por otro lado, la diferencia entre la energía dinámica final e inicial es

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\gamma A_2 ds_2}{g} \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma A_1 ds_1}{g} \frac{v_1^2}{2}$$

Y al sustituir estos valores en la ecuación de la variación de la energía cinemática y el trabajo

$$\int_0^s F ds = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

se obtiene lo siguiente

$$p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 + \gamma A_1 ds_1 (z_1 - z_2) - \delta_f = \frac{\gamma A_2 ds_2}{g} \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma A_1 ds_1}{g} \frac{v_1^2}{2}$$

Ordenando términos y considerando que $\gamma A_1 ds_1 = \gamma A_2 ds_2$ (ya que se trata del mismo volumen), se tiene que

$$p_1 A_1 ds_1 + \gamma A_1 ds_1 z_1 + \frac{\gamma A_1 ds_1}{g} \frac{v_1^2}{2} - \delta_f = p_2 A_2 ds_2 + \gamma A_2 ds_2 z_2 + \frac{\gamma A_2 ds_2}{g} \frac{v_2^2}{2}$$

Esta es la ecuación de la energía para el peso del volumen diferencial $A_1 ds_1$, que se traslada a la posición que ocupa $A_2 ds_2$, la cual fue presentada por Daniel Bernoulli y por lo cual también es conocida como ECUACIÓN DE BERNOULLI. Los primeros términos de ambos lados de la ecuación son energías debido a la presión, los segundos son debido a la posición y los terceros debido a la velocidad.

Dividiendo entre el peso del volumen considerado ($\gamma A_1 ds_1 = \gamma A_2 ds_2$), se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{\delta_f}{\gamma A_1 ds_1} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

La forma acostumbrada de representar esta ecuación es

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_p$$

en donde

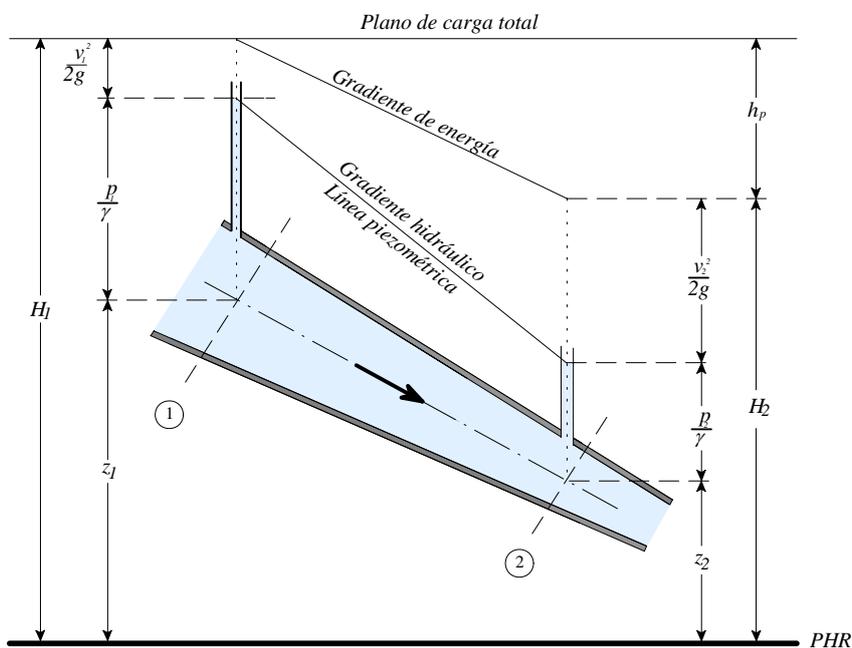
$$h_p = \frac{\delta_f}{\gamma A_1 ds_1} = \text{energía transformada por el desplazamiento de la masa líquida}$$

z = energía o carga de posición

$\frac{p}{\gamma}$ = energía o carga de presión

$$\frac{v^2}{2g} = \text{energía o carga de velocidad}$$

Los términos de esta ecuación representan trabajo por unidad de peso (ya que se dividió entre $\gamma A ds$) y sus unidades corresponden a unidades de longitud. Esta ecuación se puede visualizar mediante un tramo de una corriente, comprendido entre dos secciones 1 y 2 de un conducto de sección variable, referidas a un plano horizontal, como se muestra en la siguiente figura siguiente.



Las energías de posición z_1 y z_2 son las alturas de las secciones 1 y 2, respectivamente, sobre el plano horizontal de referencia (PHR), los piezómetros colocados en los puntos 1 y 2 muestran la energía de presión ($\frac{P_1}{\gamma}$ y $\frac{P_2}{\gamma}$) en esos puntos y las energías de velocidad se muestran como $\frac{v_1^2}{2g}$ y $\frac{v_2^2}{2g}$ en 1 y 2, respectivamente.

Al sumar en cada sección los tres tipos de energía (posición, presión y velocidad) se tiene la **energía total disponible** en cada sección (H). Si se unen las coordenadas

correspondientes, se obtiene la línea que muestra el *gradiente de energía* y cuyas ordenadas se miden a partir del plano horizontal de referencia (PHR), donde $z=0$.

Si se unen las superficies libres de los piezómetros, se obtiene la *línea piezométrica* que representa el *gradiente hidráulico*. Las distancias medidas desde el eje del conducto y esta línea, indican las cargas o energías de presión a lo largo del conducto.

La línea horizontal que pasa a la altura de H_1 , indica el perfil del plano de carga total disponible en la sección 1 y la diferencia entre la energía total disponible en la sección 1 y la sección 2, representa la pérdida de carga total h_p , es decir

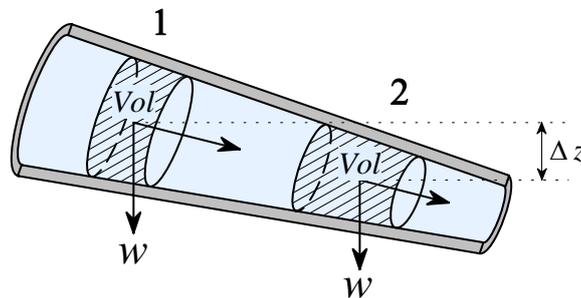
$$h_p = H_1 - H_2$$

Es importante recordar que aunque se utiliza el término “*pérdida*”, esto no significa que la energía se pierde entre 1 y 2, ya que de acuerdo al principio de conservación de la energía, esta solamente se transforma.

4.6 POTENCIA HIDRÁULICA

Lo potencia se define como el trabajo realizado en la unidad de tiempo, o la rapidez con que se realiza un trabajo. En el sistema métrico gravitacional, las unidades de potencia son: $kg\cdot m/s$

Para calcular la potencia necesaria para trasladar un volumen (Vol), de un fluido en un conducto, de la posición 1 a la 2, como el que se muestra en la figura, se aplica la definición de potencia de la siguiente manera:



Si Δz es la diferencia de elevaciones entre los centros de gravedad del volumen (Vol), en las posiciones 1 y 2, por lo tanto el trabajo realizado (δ) al pasar de la posición 1 a la

2, será igual al producto del peso del volumen del fluido (γVol) por la diferencia de elevaciones, es decir

$$\delta = \gamma Vol \Delta z$$

Al dividir esto entre el tiempo se obtiene una expresión para la potencia

$$P = \frac{\delta}{t} = \frac{\gamma Vol \Delta z}{t}$$

Pero como

$$\frac{Vol}{t} = Q \text{ (caudal)}$$

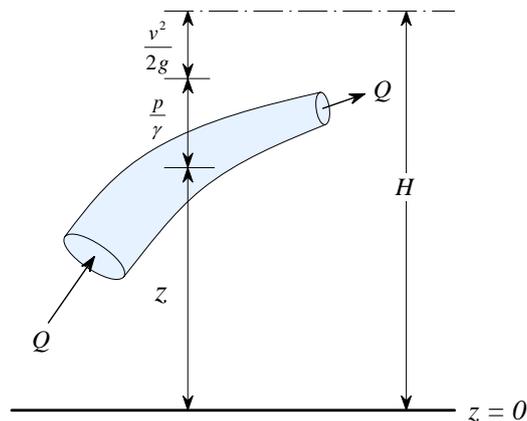
Entonces

$$P = \gamma Q \Delta z$$

Que es la expresión para calcular la potencia que desarrolla un fluido en movimiento.

Por otro lado, en una sección de una tubería, como la que se muestra en la figura siguiente, por la cual pasa un gasto Q , la energía disponible H genera una potencia que es igual a

$$P = \gamma Q H$$



La unidad mas empleada para medir la potencia es el caballo de fuerza (HP), que es igual a

$$HP = 550 \frac{lb \cdot ft}{s}$$

En el sistema MKS gravitacional

$$hp = 550 \frac{\cancel{lb}f/\cancel{ft}}{s} \frac{kgf}{2.205\cancel{lb}f} \frac{m}{3.281\cancel{ft}} \approx 76 \frac{kgf \cdot m}{s}$$

Por lo tanto, para utilizar las unidades del sistema MKS gravitacional, a relación anterior se modifica de tal forma que

$$P = \frac{\gamma Q H}{76}$$

En donde la potencia (P) está dada en caballos de fuerza (HP), el caudal (Q) en m^3/s y el peso específico (γ), en kg/m^3 .

Con frecuencia, también se utilizan los caballos de vapor (CV) para definir la potencia. En este caso, la expresión anterior se convierte en

$$P = \frac{\gamma Q H}{75}$$

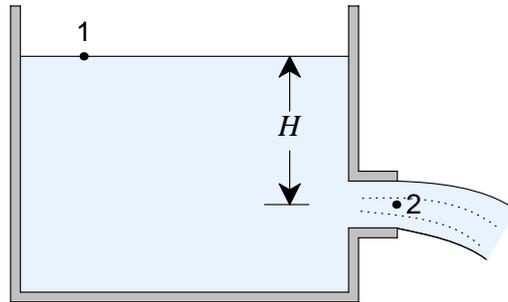
Otra unidad común para expresar la potencia es el kilowatt-hora (kW), cuya conversión es

$$kW = 1.341 HP$$

4.7 TEOREMA DE TORRICELLI

La forma de calcular la descarga o gasto a través de un orificio de ciertas dimensiones y bajo una carga o tirante hidráulico, se debe a los experimentos desarrollados por Evangelista Torricelli, que decía:

Considérese un recipiente con un orificio en una pared lateral como el que se muestra en la siguiente figura.



Si se aplica la ecuación de la energía o ecuación de Bernoulli, del punto 1 al punto 2 y se considera que:

- 1) no existen pérdidas de carga entre 1 y 2
- 2) al estar en contacto con la atmósfera, la presión relativa en ambos puntos 1 y 2 es cero
- 3) la velocidad V en el punto 1 es muy pequeña y por lo tanto despreciable

Bajo estas condiciones, la ecuación de la energía queda entonces como:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

por lo tanto

$$\frac{V_2^2}{2g} = z_1 - z_2 = H$$

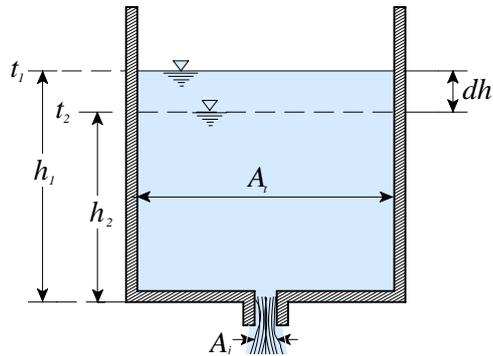
Al despejar la velocidad, se obtiene la siguiente expresión

$$V = \sqrt{2gH}$$

que se conoce como el **Teorema de Torricelli**

Flujo con descenso de carga

Considérese un recipiente con un orificio, que contiene un líquido, cuyo nivel desciende continuamente a través del tiempo, como el que se muestra en la figura siguiente



Para determinar el tiempo de vaciado es necesario integrar la ecuación del teorema de Torricelli, ya que el gasto que sale por el orificio no es constante debido a que la carga sobre este varía.

De la ecuación de caudal se tiene que

$$Q_i = A_i V_i$$

donde

A_i = área transversal del chorro

V_i = velocidad media del chorro

Para un intervalo de tiempo (dt), el volumen de líquido que sale del recipiente es

$$Q(dt) = A_i V_i (dt)$$

A medida que el líquido sale del recipiente, el nivel desciende. Para el intervalo dt , el nivel disminuye en una cantidad igual a dh . Por lo tanto, el volumen de fluido removido es

$$- A_t dh$$

Donde A_t es el área transversal del recipiente y el signo negativo es para denotar el descenso de carga.

Así entonces, estos dos volúmenes deben de ser iguales y por lo tanto

$$A_i V_i (dt) = - A_t dh$$

o bien

$$dt = \frac{\left(\frac{-A_t}{A_i}\right)}{V_i} dh$$

y aplicando el teorema de Torricelli, se tiene

$$dt = \frac{\left(\frac{-A_t}{A_i}\right)}{\sqrt{2gh}} dh = \frac{\left(\frac{-A_t}{A_i}\right)}{\sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

Integrando

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{\left(\frac{-A_t}{A_i}\right)}{\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\left(\frac{-A_t}{A_i}\right)}{\sqrt{2g}} \left| 2(h)^{\frac{1}{2}} \right|_{h_1}^{h_2}$$

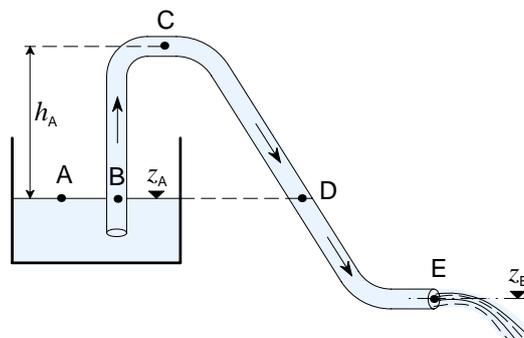
o bien

$$\Delta t = \frac{2(A_t/A_i)}{\sqrt{2g}} (h_1 - h_2)^{\frac{1}{2}}$$

5. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

5.1 Sifones

Un sifón es un dispositivo hidráulico que se utiliza para extraer un líquido de un depósito cuando existe un obstáculo por encima de la superficie libre del agua en el depósito, tal como se muestra en la siguiente figura.



Para que el sifón funcione, es necesario mantener una presión negativa (menor que la atmosférica) del punto B al punto C, de tal forma que el líquido logre ascender hasta el punto C de la figura. La presión mínima, ocurre en este punto y su valor depende de la altura h_A ; a mayor altura menor presión. Por lo tanto, la altura máxima a la que se elevar el líquido, teóricamente, es la siguiente:

$$h_{\max} = \frac{p_{\text{atm}}}{\gamma}$$

Donde p_{atm} es la presión atmosférica y γ es el peso específico del líquido. En el caso del agua, en condiciones normales de presión y temperatura

$$h_{\max} = \frac{p_{\text{atm}}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{1.033 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}}{1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 10.33\text{m}$$

Este valor en realidad es menor ya que existen pérdidas de energía a lo largo del sifón.

Una vez que se logra establecer el flujo en un sifón, este se mantiene constante, a menos que cambie el valor de la diferencia de elevaciones entre los puntos A y E ($z_A - z_E$), de la figura.

Para calcular el caudal que se extrae con un sifón, es necesario aplicar la ecuación de la energía entre los puntos A y E, de la siguiente forma

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + h_p$$

Donde h_p denota las pérdidas de carga.

Como la presión en los punto A y E corresponde a la atmosférica y como se está tratando con presiones relativas, entonces

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_E}{\gamma} = 0$$

Asimismo, si se considera que la elevación de la superficie libre en el depósito permanece constante, entonces

$$\frac{V_A^2}{2g} = 0$$

Por último, si se desprecian las pérdidas de carga, es decir $h_p \approx 0$, entonces la ecuación de la energía original, se reduce a

$$z_A = z_E + \frac{V_E^2}{2g}$$

Al despejar la velocidad se obtiene la siguiente expresión

$$V_E = \sqrt{2g(z_A - z_E)}$$

Para obtener el caudal, de acuerdo a la expresión del caudal $Q = VA$, se multiplica por el área de la sección del conducto (A), perpendicular al flujo, es decir

$$Q = A\sqrt{2g(z_A - z_E)}$$

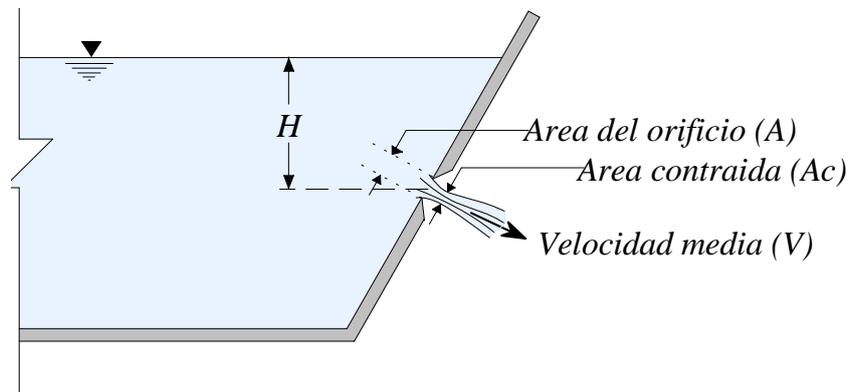
Para conductos circulares

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g(z_A - z_E)}$$

Donde D es el diámetro del conducto.

5.2 Orificios

Un orificio es básicamente una abertura de forma regular (círculo, rectángulo, triángulo, etc.), relativamente pequeña, que se practica en la pared de un recipiente con el objeto de extraer un gasto. Cuando el orificio tiene aristas delgadas, como se muestra en la figura siguiente, se dice que es un “*orificio de pared delgada*”.



Como las partículas en la proximidad de orificios se mueven en dirección aproximada hacia el centro, debido a su inercia se produce una contracción de la sección transversal del chorro. A esta sección se le llama sección contraída y tiene un área “ A_c ”, la cual es menor que el área del orificio “ A ”.

Si el nivel del agua permanece constante, se puede aplicar el teorema de *Toricelli* para calcular la velocidad media “ V ”, es decir

$$V = \sqrt{2gH}$$

Para tomar en cuenta las pérdidas de energía y la variación de velocidad en el área transversal del chorro, esta ecuación se debe corregir mediante un coeficiente de velocidad “ C_v ”, esto es

$$V = C_v \sqrt{2gH}$$

La magnitud de este coeficiente se determina de forma experimental y en general su valor es cercano a la unidad.

Para determinar el gasto, la velocidad simplemente se multiplica por el área transversal contraída del chorro (A_c), es decir

$$Q = A_c C_v \sqrt{2gH}$$

Si el área contraída se calcula en función del área del orificio, entonces

$$Q = C_v C_c A \sqrt{2gH}$$

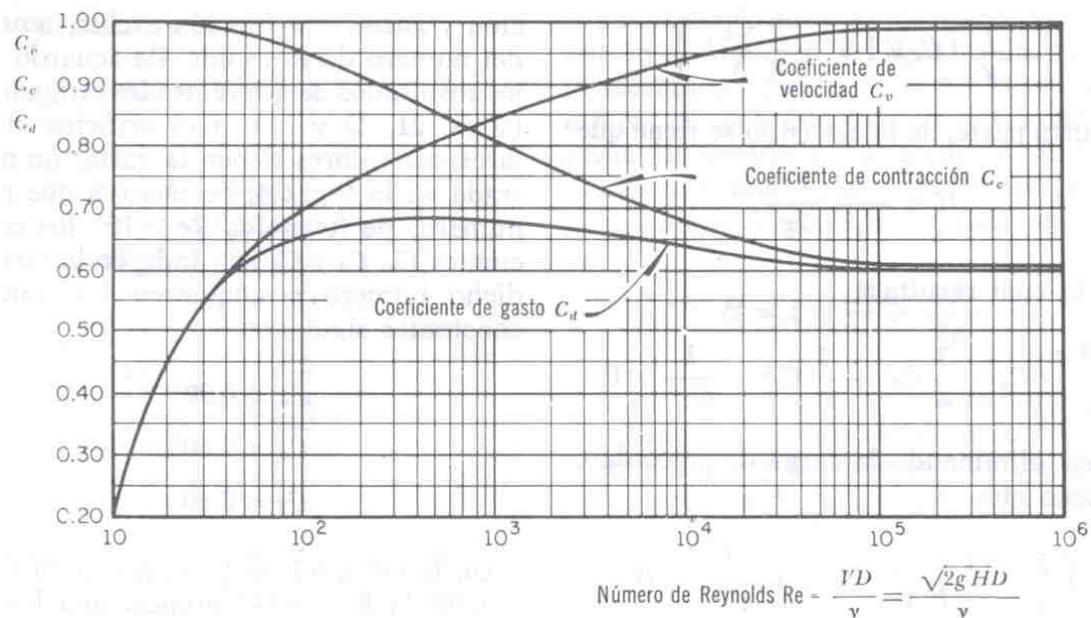
Donde C_c es el coeficiente de contracción y resulta de dividir el área del chorro entre el área del orificio, es decir

$$C_c = \frac{A_c}{A}$$

Al producto $C_v C_c$ se le conoce como el coeficiente de descarga C_d . Así, entonces, al sustituir en la ecuación del gasto se tiene que

$$Q = C_d A \sqrt{2gH}$$

Los coeficientes de velocidad, contracción y descarga son función exclusivamente del número de Reynolds (Re) y varían según se muestra en la figura siguiente.



Variación del C_c , C_v y C_d con el numero de Reynolds (Sotelo, 1979)

De acuerdo con diferentes investigaciones, para orificios circulares y para $Re > 10^5$, los valores de estos coeficientes son

$$C_v = 0.999$$

$$C_c = 0.605$$

$$C_d = 0.600$$

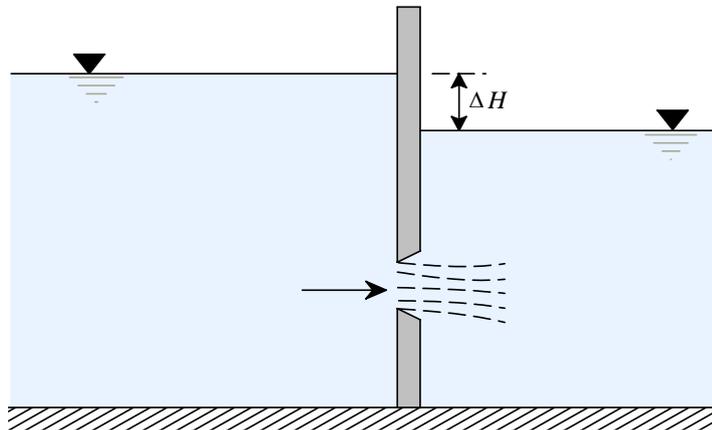
La pérdida de carga causada por un orificio es función solamente de la velocidad y se calcula a través de la siguiente ecuación.

$$h_p = K \frac{v^2}{2g}$$

donde

$$K = \frac{1}{C_v^2} - 1$$

Cuando la descarga por un orificio se encuentra sumergida, tal como se muestra en la figura siguiente, se dice que el flujo por el orificio ocurre con *descarga sumergida*.



En este caso el caudal se calcula de acuerdo a la expresión siguiente

$$Q = Cd A \sqrt{2g\Delta H}$$

donde

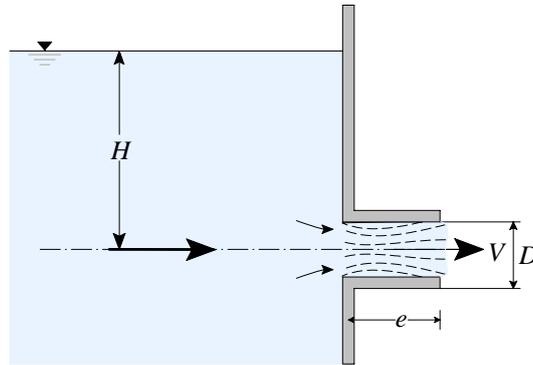
Cd = Coeficiente de descarga

A = área del orificio

ΔH = diferencia de niveles

Se recomienda utilizar el mismo coeficiente de descarga que el de un orificio a descarga libre.

Cuando el contorno del orificio no tiene aristas afiladas, el orificio se conoce como **orificio de pared gruesa**. En este tipo de orificio, como se muestra en la figura, el chorro llena la totalidad de la sección del orificio, una vez que se ha expandido.



De manera similar a los orificios analizados anteriormente, la velocidad del chorro de la descarga del orificio se calcula con la fórmula siguiente

$$V = C_v \sqrt{2gH}$$

Cuando $e/D = 3$, el valor del coeficiente C_v es igual a 0.82 y además, como diámetro del chorro es igual al diámetro del orificio, entonces $C_c = 1$ y por lo tanto $C_d = C_v$. La pérdida de energía es entonces

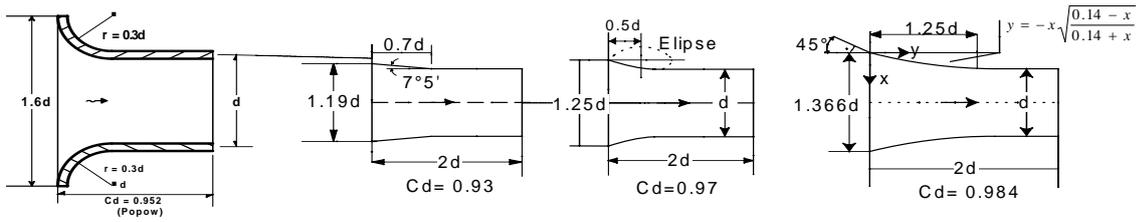
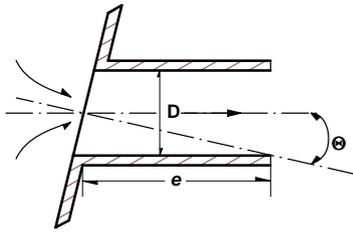
$$h_p = \left(\frac{1}{0.82^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g} = 0.49 \frac{V^2}{2g}$$

Cuando $e/D > 3$, la fricción empieza a tener influencia y por lo tanto, el flujo en el orificio (formado por un tubo corto) debe considerarse como flujo en un tubo a presión. En la siguiente tabla se presentan los coeficientes de descarga para diferentes tipos de orificios de pared gruesa (fuente: "*Hidráulica General*", Sotelo Ávila, 1979, editorial Limusa).

a) Tubo corto.

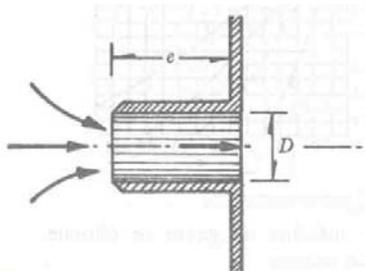
Para $\theta = 0^\circ$ (Domínguez, Eytelwein y Schurinu).

$e/d \leq 0.5$	1	1.5	2.0	2.5	3	5
C_d	0.60	0.75	0.78	0.79	0.80	0.82
e/d	12	25	36	50	60	100
C_d	0.77	0.71	0.68	0.64	0.60	0.55



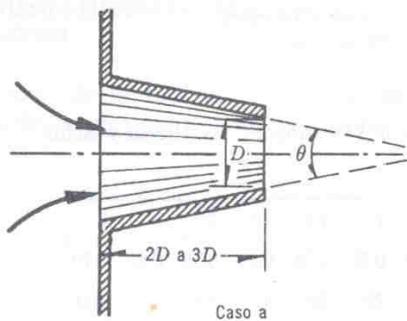
Para $e/D = 3$ el coeficiente C_d , según Weisbach, se obtiene de los siguientes valores en función de θ :

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
C_d	0.82	0.80	0.78	0.76	0.75	0.73	0.72



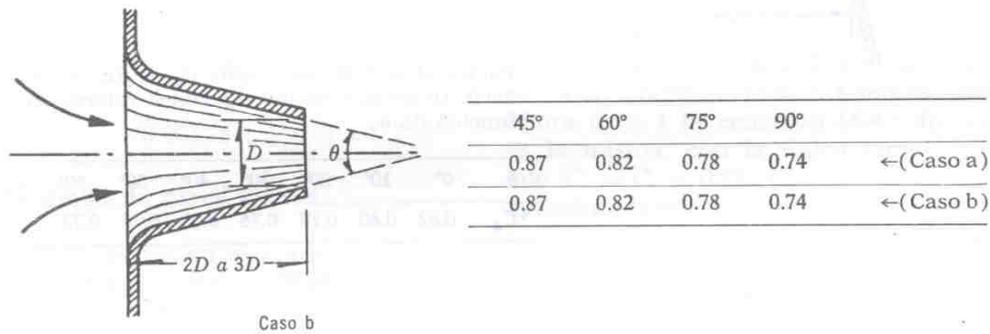
b) Tubos cilíndricos reentrantes (tubos de Borda)

	C_d	C_v	C_o
$e > 3D$	0.71	0.71	1.00
$e < 3D$	0.51	0.97	0.53

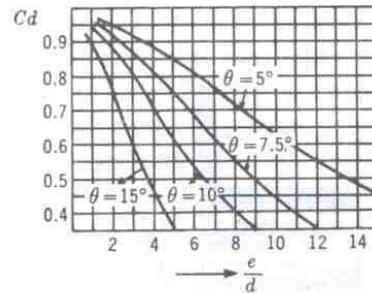
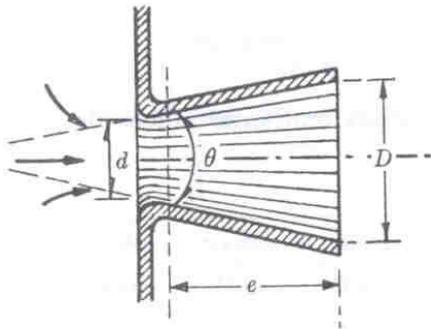


c) Tubos convergentes para aristas agudas y redondeadas, respectivamente.

θ	0°	4°	8°	12°	16°	30°
C_d (Caso a)	0.82	0.916	0.942	0.95	0.941	0.92
C_d (Caso b)	0.96	0.96	0.959	0.955	0.941	0.92



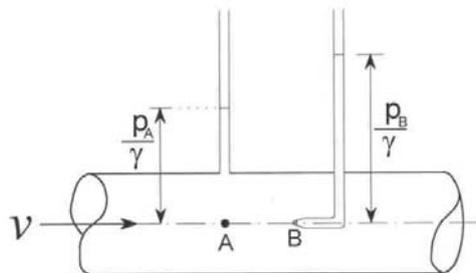
d) Tubos divergentes. Si $\theta \cong 8^\circ$ la vena líquida no llena toda la sección y ocurre la separación. En el caso de aristas redondeadas el coeficiente C_d , referido a la sección de salida, se obtiene de la siguiente gráfica, donde



el coeficiente máximo de gasto se obtiene para $\theta = 5^\circ$.

5.3 Tubo Pitot

El tubo Pitot mide la velocidad en un punto, basado entre la diferencia de la presión de estancamiento y la presión hidrostática, tal como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando la ecuación de la energía entre A y B y considerando que no existen pérdidas, se tiene

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + h_p$$

Como la velocidad en B es cero, entonces

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g}$$

Donde p_B se conoce como presión de estancamiento.

Despejando v_A , que es igual a la velocidad promedio v , se tiene

$$v = \sqrt{2g \left(\frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} \right)}$$

De esta forma se determina la velocidad, con base en la diferencia de las cargas de presión entre A y B. Esta velocidad, sin embargo, no es la real ya que se ignora la pérdida de carga debido a las características geométricas y material con que está hecho el tubo Pitot. Para tomar en cuenta estos factores, se introduce un coeficiente y de esta manera se tiene que

$$v = C \sqrt{2g \left(\frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} \right)}$$

en donde C se determina experimentalmente.

5.4 FLUJO EN TUBERÍAS

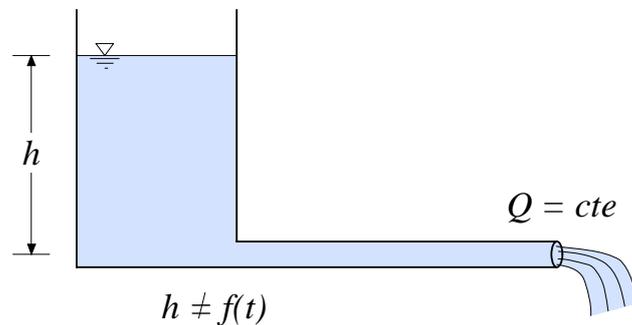
En el análisis de flujo en tuberías es importante conocer el tipo de flujo, ya que de ello depende la selección del método a utilizar.

5.4.1 Con respecto al tiempo

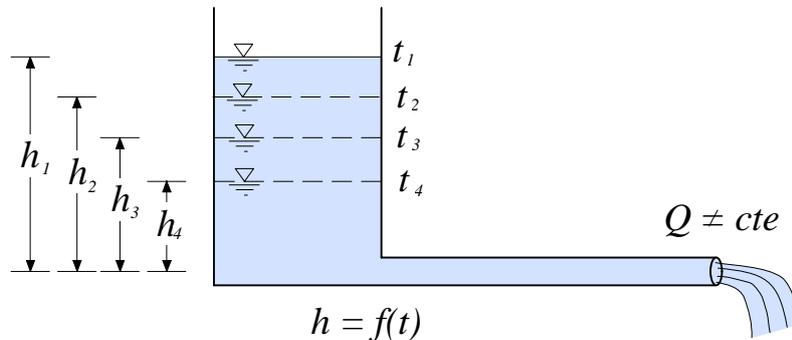
De acuerdo a la variación temporal del flujo, este se clasifica en:

1. Flujo permanente o estacionario
2. Flujo no permanente o no estacionario
3. Flujo transitorio

Flujo permanente.- se presenta cuando las características del flujo como son velocidad y presión, permanecen constantes en el tiempo. Por ejemplo, el flujo en una tubería conectada a un tanque de carga constante, como el que se muestra en la figura siguiente



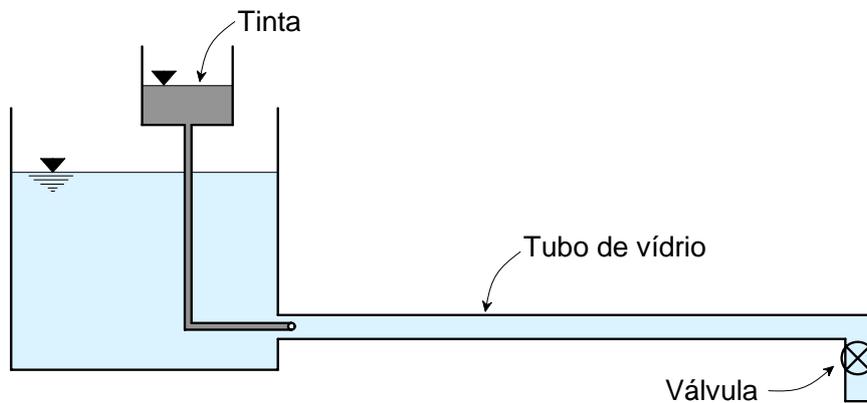
Flujo no permanente.- ocurre cuando las condiciones de flujo cambian continuamente en el tiempo, como es el caso del vaciado de recipientes a través de un orificio, donde el nivel del líquido desciende continuamente hasta llegar al fondo y como consecuencia la velocidad y el gasto disminuyen hasta llegar a cero.



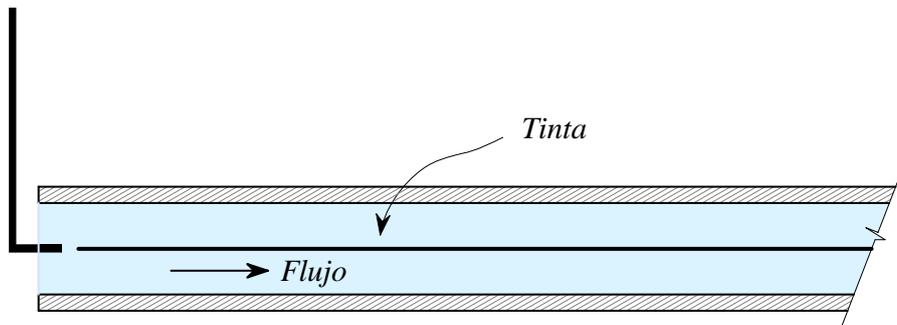
Flujo transitorio.- es un flujo de transición entre dos flujos permanentes. Por ejemplo, el cerrar parcialmente una válvula en una tubería por la que fluye un líquido a una velocidad, causa que el flujo cambie de su estado original a un estado final que depende de la abertura de la válvula. Entre el estado inicial y el final, ocurre el régimen de flujo transitorio y la velocidad cambia de V_o (velocidad inicial) a V_f (velocidad final)

5.4.2 Con respecto al comportamiento

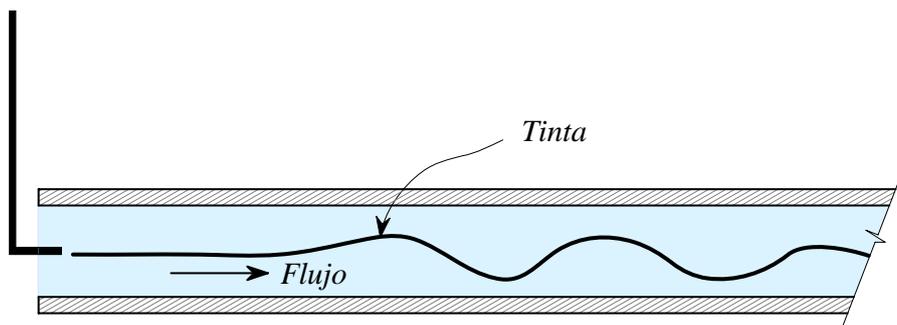
En el pasado se sabía de la existencia de 2 tipos de flujo, los cuales se diferenciaban por su comportamiento. G. H. L. Hagen en 1840, había identificado los principios y diferencias de estos dos tipos de flujo. Sin embargo, no fue sino hasta el periodo entre 1880 y 1884 en que Osborne Reynolds de la Universidad de Cambridge en Inglaterra, logró describirlos utilizando un aparato como el que se muestra esquemáticamente en la figura siguiente.



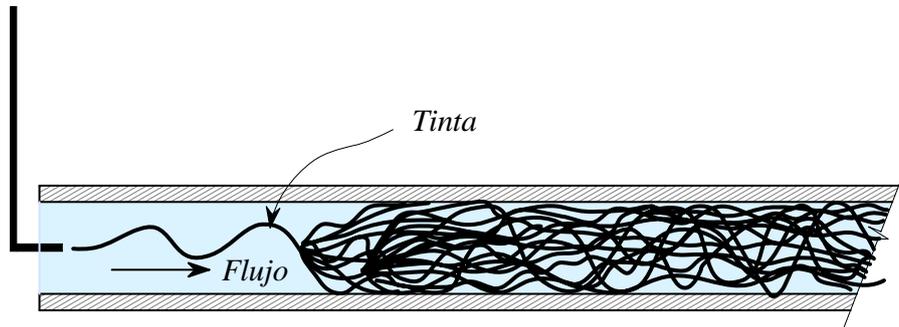
Al manipular la válvula, Reynolds lograba controlar la velocidad del flujo en el conducto. Para velocidades bajas, observó que la tinta inyectada al caudal seguía una trayectoria recta sin mezclarse con el líquido del flujo, como se muestra en la figura siguiente



Para velocidades intermedias, la trayectoria de la tinta comenzaba a ondular pero no se mezclaba con el líquido del flujo, como se muestra a continuación.



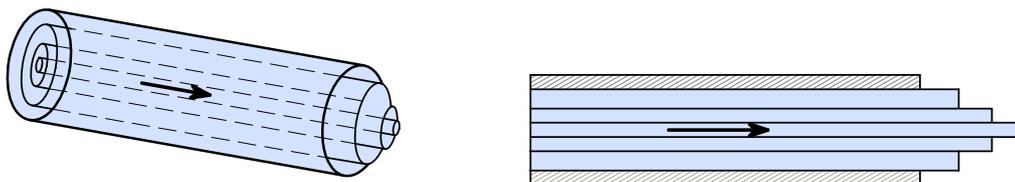
Cuando las velocidades eran más altas, la trayectoria de la tinta se volvía más inestable y esta inestabilidad se acercaba más a la boquilla de inyección de tinta. Asimismo, en un punto dado la tinta se mezclaba con el fluido, como se muestra en la figura siguiente



Para velocidades todavía más grandes, la mezcla de tinta con el líquido del flujo se hacía más intensa y se estabilizaba en un punto cercano a la boquilla de extracción de tinta.

Con base en estas observaciones, Reynolds definió los tipos de flujo de la siguiente forma:

Flujo Laminar.- cuando la tinta no se mezclaba por lo que se desarrolla de manera ordenada como si estuviera compuesto de capas que se desplazan a diferentes velocidades. En una tubería, el flujo se desarrolla en forma de cilindros concéntricos, como se muestra en la siguiente figura



Flujo Turbulento.- cuando la tinta se mezcla completamente, se presenta intercambio de "paquetes" de fluido entre las masas que se mueven a diferente velocidad y las partículas siguen una trayectoria irregular y caótica y no es posible distinguir patrones definidos de las velocidades por lo que se debe hablar de una velocidad promedio del flujo.

Número de Reynolds

Osborne Reynolds demostró que se puede determinar si un flujo es laminar o es turbulento cuando se conoce la magnitud de un parámetro adimensional que depende de la relación entre las fuerzas viscosas y las de inercia, es decir

$$R_e = \frac{F}{\tau A} \quad (1)$$

Donde

R_e = parámetro conocido como número de Reynolds

F = fuerzas de inercia

τ = esfuerzo cortante entre las partículas del fluido en movimiento

A = área de contacto entre las partículas

Las fuerzas de inercia se calculan de acuerdo a la segunda Ley de Newton ($F = ma$) y el esfuerzo cortante como

$$\tau = \mu \frac{\Delta V}{\Delta y} \quad (2)$$

Al sustituir en (1) se tiene

$$R_e = \frac{ma}{\mu \frac{\Delta V}{\Delta y} A} \quad (3)$$

pero como, $m = \rho Vol$ y $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, entonces

$$R_e = \frac{\rho Vol \frac{\Delta V}{\Delta t}}{\mu A}$$

Asimismo, $L = \frac{Vol}{A}$ y $V = \frac{\Delta y}{\Delta t}$, entonces

$$R_e = \frac{\rho LV}{\mu} \quad (4)$$

Donde L es una longitud característica, que en el caso de una tubería corresponde al diámetro. Por lo tanto

$$R_e = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{DV}{\mu / \rho}$$

pero como $\nu = \mu / \rho$, entonces

$$R_e = \frac{DV}{\nu} \quad (5)$$

Cuando las fuerzas de inercia son mayores que las fuerzas viscosas, el número de Reynolds resulta relativamente alto. En este caso, para números de Reynolds arriba de 3000, el flujo presenta régimen turbulento.

Para números valores del número de Reynolds inferiores a 2000, el tipo de flujo es laminar, lo cual significa que las fuerzas viscosas dominan.

En el rango de 2000 a 3000, no es posible distinguir el tipo de flujo, por lo que se considera flujo de transición.

En un ambiente muy controlado, donde se tiene una cuidadosa minimización de las variaciones, es posible lograr un flujo laminar para valores del número de Reynolds de hasta 5000, sin embargo en la mayoría de los casos esto no sucede y por lo tanto para fines prácticos, se supone los siguientes intervalos que definen el tipo de flujo:

$R_e \leq 2000$, *Flujo laminar*

$R_e \geq 3000$, *flujo turbulento*

$2000 < R_e < 3000$, *flujo crítico*

5.4.3 PÉRDIDAS DE CARGA

Un fluido, al desplazarse en el interior de un conducto, encuentra resistencia debido a la fricción con las paredes y entre la mismas partículas del fluido, así como a los obstáculos (válvulas, cambios de dirección, etc.) colocados a lo largo del conducto, lo que ocasiona, invariablemente, una disminución en la energía disponible. A esta disminución de energía se le conoce como pérdidas de carga. Estas pueden ser distribuidas (por fricción), ó locales (causadas por accesorios).

5.4.3.1 Pérdidas de Carga por Fricción

Las pérdidas de carga por fricción se deben a viscosidad del fluido y a las colisiones, ya sea con entre partículas o con las paredes interiores del conducto. Cuando el régimen de flujo es laminar, la viscosidad tiene un gran efecto en la definición de pérdidas de carga por fricción, ya que entre las capas o cilindros concéntricos que forman este flujo, se desarrollan fuerzas que se oponen al movimiento. En flujo turbulento, la viscosidad tiene menor efecto ya que las colisiones ocurren con mayor frecuencia, debido a la naturaleza desordenada de este régimen de flujo.

Las características geométricas más importantes para la evaluación de las pérdidas de carga por fricción, son las siguientes:

Área Hidráulica (A_H) = área de la sección transversal del conducto, ocupada por el flujo.

Perímetro mojado (P_m) = perímetro de la sección transversal del conducto donde existe contacto con el fluido.

Radio Hidráulico (R_H) = relación entre área hidráulica y perímetro mojado.

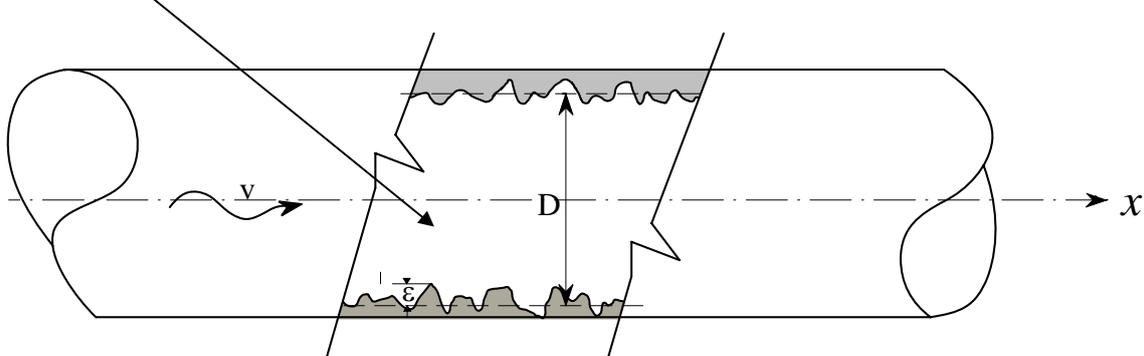
Rugosidad Relativa = relación entre la rugosidad absoluta de las paredes y el diámetro del conducto.

Para un conducto de sección circular, como es el caso de una tubería, el radio hidráulico (R_H) es el siguiente

$$R_H = \frac{A_H}{P_m} = \frac{\pi D^2}{4 D \pi}$$

$$R_H = \frac{D}{4}$$

Debido a que la distribución de irregularidades en la pared de un conducto es muy compleja, como se puede apreciar en la figura siguiente, es necesario simplificar mediante una medida *promedio de la rugosidad*, a la cual se le denomina *rugosidad absoluta* (ϵ).



A la relación entre la rugosidad absoluta y el diámetro del conducto, se le conoce como *rugosidad relativa*, es decir

$$\text{rugosidad relativa} = \frac{\epsilon}{D}$$

Ecuación General (Darcy-Weisbach)

La pérdida de carga debida a la fricción (h_f) depende del diámetro (D), la longitud (L) y la rugosidad absoluta (ϵ) del conducto; así como de la velocidad media del flujo (V); la densidad (ρ) y la viscosidad dinámica (μ) del fluido y la aceleración de la gravedad (g). Por lo tanto, mediante un análisis dimensional se encuentra que

$$h_f = \frac{L V^2}{D 2g} F\left(\frac{\epsilon}{D}, R_e\right)$$

Como los argumentos de la función "F" son adimensionales, el valor de esta función debe ser también adimensional. Si este valor se denota como

$$f = F\left(\frac{\epsilon}{D}, R_e\right)$$

entonces

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

Esta ecuación fue propuesta por los ingenieros Henry Darcy (francés) y Julios Weisbach (alemán) en el siglo XIX y por esta razón se le conoce como la **ecuación de Darcy-Wisbach**.

Coeficiente de fricción

La determinación de la forma exacta de la función “ f ” probó ser muy complejo y no fue sino hasta finales de la década de 1920 en que se resolvió para los diferentes tipos de flujo.

Flujo Laminar

Para establecer las expresiones que describen las pérdidas de carga por fricción en este tipo de flujo, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

Las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas de inercia. Se cumple la ecuación de Newton para fluidos viscosos:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

G. Hagen (ingeniero alemán, 1794-1869) y J. Poiseville (médico francés, 1799-1869) encontraron, en forma simultánea y por separado, que la pérdida de carga en flujo laminar es proporcional a la relación entre el caudal (Q) que pasaba por el conducto y el diámetro (D) a la cuarta potencia, es decir

$$h_f \propto \frac{Q}{D^4}$$

A través del análisis de los esfuerzos cortantes que se desarrollan entre las capas del flujo, se determina una constante de proporcionalidad que sirve para establecer la siguiente igualdad

$$h_f = \frac{128 \mu L}{\rho g \pi D^4} Q$$

donde

- h_f = Pérdida de carga por fricción
- μ = viscosidad dinámica del fluido
- L = longitud del conducto
- ρ = densidad del fluido

La relación entre la pérdida de carga y la longitud, se define como la pendiente de fricción (S_f),

$$S_f = \frac{h_f}{L}$$

entonces

$$S_f = \frac{128 \mu}{\rho g \pi D^4} Q$$

Combinando la ecuación de Hagen –Poiseville y la de Darcy-Weisbach, se obtiene el factor de fricción para flujo laminar de la siguiente forma

$$f \frac{L V^2}{D 2g} = \frac{128 \mu L Q}{\rho g \pi D^4}$$

Al expresar el caudal Q en función de la velocidad, se tiene

$$f = \frac{64 \mu}{VD} = \frac{64 \frac{\mu}{\rho}}{VD} = \frac{64 \nu}{VD} = \frac{64}{\frac{VD}{\nu}}$$

pero $R_e = \frac{VD}{\nu}$, entonces

$$f = \frac{64}{R_e}$$

Que es la función para el factor de fricción para un régimen laminar.

Flujo Turbulento

A) Conductos Hidráulicamente Lisos

Cuando las irregularidades de la pared interior del conducto quedan cubiertas en su mayoría por la capa de líquido que se adhiere a este, se dice que el tubo es *hidráulicamente liso*. Diversos investigadores estudiaron este caso y propusieron varias expresiones para calcular el factor de fricción.

Fórmula de Blasius

Paul Richard Heinrich Blasius encontró empíricamente, que para este tipo de situaciones y valores del número de Reynolds entre 5000 y 100,000 el factor de fricción se puede calcular como

$$f = \frac{0.316}{R_e^{0.25}}$$

Esta fórmula, a pesar su rango limitado de aplicación, es útil para mejor entender la caída de presión en tuberías. Si se sustituye esta expresión en la fórmula de Darcy-Weisbach y se acomodan las variables, se obtiene

$$\frac{\Delta p}{L} = 0.241 \nu^{0.25} \rho Q^{1.75} D^{-4.75}$$

De esta expresión se observa que la caída de presión por unidad de longitud es inversamente proporcional al diámetro elevado a la potencia 4.75, lo cual quiere decir, que la disminución de las pérdidas causadas por la fricción, se logra aumentando el diámetro.

Fórmula de Prandtl y Von Karman

Basado en una expresión propuesta por Theodore Von Karman y después de confirmar los resultados con experimentos en laboratorio, Ludwig Prandtl propuso la siguiente expresión para calcular el factor de fricción en tuberías hidráulicamente lisas.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\log(R_e / \sqrt{f}) - 0.8$$

B) Conductos Hidráulicamente Rugosos

Para flujos hidráulicamente rugosos, cuando la rugosidad absoluta es mayor que el espesor de la capa de líquido adherida a la pared interior del conducto, se tienen varias expresiones entre las que se encuentran las siguientes:

Fórmula de Prandtl y Von Karman

A través de mediciones en laboratorio, Prandtl y Von Karman modificaron su expresión para tubos lisos y propusieron la siguiente fórmula para tubos rugosos

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{r_0}{\varepsilon} + 1.74$$

Esta expresión solo aplica para situaciones en las que el flujo se establece completamente como turbulento.

Fórmula de Colebrook-White

En la mayoría de los casos el flujo de agua en tuberías se encuentra en estado de transición a un flujo completamente turbulento, por tal motivo, las fórmulas de Prandtl y Von Karman no son aplicables. Colebrook-White, del Instituto de Hidráulica de los Estados Unidos, propusieron la siguiente fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right)$$

Esta ecuación que combina los resultados de Von Karman, probó ser aplicable para todo tipo de flujo turbulento en tuberías, sin embargo, tiene el inconveniente que el factor de fricción no está expresado explícitamente, por lo que es necesario recurrir al algún método numérico para calcular f .

Se han realizado diferentes estudios para tener fórmulas explícitas que permitan calcular el factor de fricción f , de ellos en 1990 Guerreiro A., J. O. presenta en el Octavo Congreso Nacional de Hidráulica de la AMH la modificación a la ecuación de Colebrook-White (ver libro "Conducción" del Manual de Diseño de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento de la Comisión Nacional del Agua):

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.71}\right) + \frac{G}{\text{Re}^T} \right]^2}$$

Donde:

$$G = 4.555 \text{ y } T = 0.8764 \quad \text{para } 4,000 \leq \text{Re} \leq 10^5$$

$$G = 6.732 \text{ y } T = 0.9104 \quad \text{para } 10^5 \leq \text{Re} \leq 3 \cdot 10^6$$

$$G = 8.982 \text{ y } T = 0.93 \quad \text{para } 3 \cdot 10^6 \leq \text{Re} \leq 10^8$$

La expresión anterior ha demostrado tener ventajas sobre otras presentaciones explícitas para calcular factor de fricción f , según lo comentado en el libro de referencia.

Diagrama de Moody

El ingeniero norteamericano Lewis F. Moody, a principios de la década de los 1940 realizó un trabajo experimental en el que confirmó los resultados de anteriores investigadores. Los resultados de su trabajo los expresó en forma de un diagrama que se conoce, en honor a su nombre, como **diagrama de Moody** (Figura 6.1). El diagrama muestra el factor de fricción en función del número de Reynolds, para una familia de curvas correspondientes a diferentes valores de rugosidad relativa.

Debido al amplio rango de valores encontrados, la gráfica es del tipo logarítmica en ambos ejes. Asimismo, comprende todos los posibles tipos de flujo que se puedan presentar para el flujo en tuberías, a través de diferentes zonas en el diagrama.

Zona Laminar

En el extremo Izquierdo del diagrama, para números de Reynolds menores a 2000, se muestra una línea recta, la cual representa los valores del factor de fricción para flujo laminar, es decir

$$f = \frac{64}{\text{Re}}$$

Zona Crítica

En el rango $2000 \leq \text{Re} \leq 4000$, no existen curvas, pues esta zona representa un tipo de flujo, entre laminar y turbulento, el cual no es posible definir.

Zona de Transición

Para números de Reynolds mayores de 4000, el diagrama muestra una familia de curvas para el flujo turbulento. Sin embargo, se muestra una zona de transición delimitada por la curva para conductos lisos y una línea tipo guión, que se extiende a lo largo del

diagrama. Esta zona representa un flujo en el que no se han establecido las condiciones de turbulencia completamente, es decir en la cual los efectos de viscosidad aún son importantes.

Zona de Completa Turbulencia

A partir de la línea tipo guión, las curvas se aproximan a rectas paralelas al eje horizontal. Esto indica que la viscosidad tiene muy poco efecto en el factor de fricción y por lo tanto es independiente del número de Reynolds.

Del diagrama de Moody se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. En la zona laminar, el factor de fricción disminuye conforme aumenta el número de Reynolds.
2. Una vez que se alcanza la zona de transición, el factor de fricción salta a un valor más alto.
3. Para un cierto valor de rugosidad relativa, el factor de fricción disminuye conforma aumenta el número de Reynolds.
4. Dentro de la zona de completa turbulencia, el número de Reynolds no tiene influencia alguna sobre el factor de fricción.
5. Para valores de rugosidad relativa bajos, la zona de completa turbulencia se alcanza para mayores números de Reynolds.

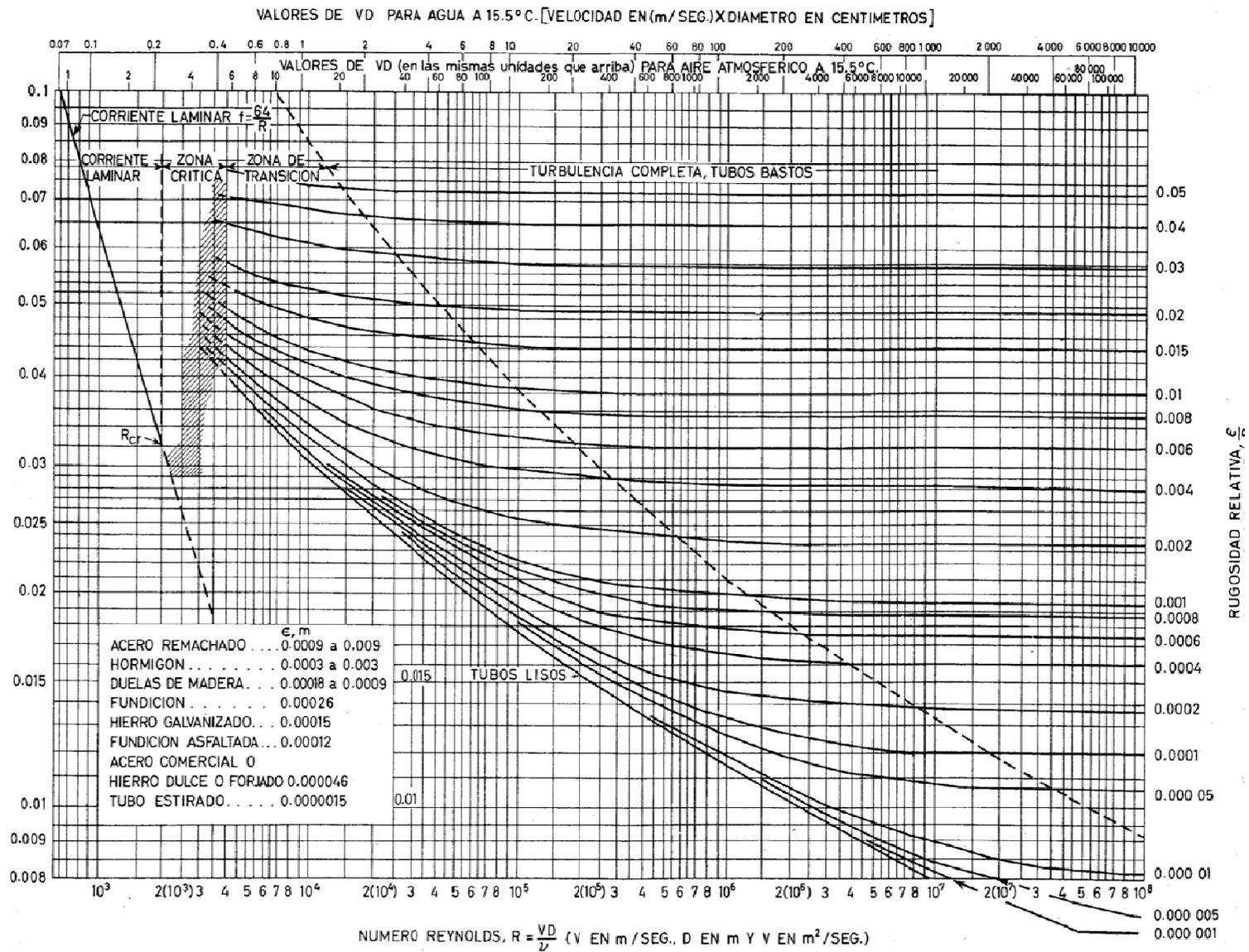


Figura 6.1 Diagrama de Moody

Las primeras tres observaciones indican un fenómeno de gran interés: Cuando se pasa de un régimen laminar a un turbulento, el factor de fricción aumenta su valor, como si se tratara de un endurecimiento del fluido. Esto se explica analizando la naturaleza de cada régimen de flujo. En el flujo laminar, el desplazamiento es ordenado y la pérdida de energía ocurre solamente por el rozamiento entre las capas adyacentes. En el flujo turbulento las partículas chocan unas con otras, causando grandes pérdidas en la energía del movimiento. Cuando no se ha establecido completamente el flujo turbulento (zona de transición), las fuerzas viscosas aun tienen efecto, por la energía consumida por el roce entre capas se suma a la energía consumida por las colisiones. Una vez que se establece el flujo turbulento, la viscosidad tiene menos efecto y el valor del factor de fricción tiende a disminuir hasta estabilizarse en un valor, independiente del número de Reynolds.

Esto fue un fenómeno que intrigó por mucho tiempo a los científicos, hasta que Nikuradse lo explicó a través de la experimentación.

Fórmula de Swamee-Jain

A diferencia de las expresiones anteriores, Swamee P.K. y Jain A.K: , propusieron la siguiente fórmula que permite determinar el factor de fricción “ f ” directamente.

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}\right) + \frac{5.74}{R_e^{0.9}} \right]^2}$$

Esta ecuación produce valores que se encuentran entre un 10% del valor proporcionado por la fórmula de Colebrooke-White y aplica para un rango de rugosidad relativa entre 0.000001 y .001 y números de Reynolds entre 5×10^3 a 1×10^8 .

Ecuación de Hazen-Williams

Es una de las ecuaciones empíricas más populares y fue desarrollada por los ingenieros norteamericanos G.S. Williams y A. H. Hazen en 1933. La forma original de esta ecuación, para el sistema internacional de unidades, es la siguiente

$$V = 0.849 C_{HW} R_H^{0.63} S_f^{0.54}$$

donde

V = velocidad media en la tubería, en (m/s)

R_H = radio hidráulico, en m.

S_f = pérdida de energía (carga) por unidad de longitud.

C_{HW} = coeficiente de rugosidad.

La pérdida de carga por unidad de longitud, se conoce como el gradiente de energía y es obviamente adimensional. Se define como

$$S_f = \frac{h_f}{L}$$

Donde " h_f " es la pérdida de carga que ocurre en una longitud " L " del conducto.

El coeficiente de rugosidad (C_{HW}) se conoce como el coeficiente de Hazen-Williams. En la siguiente tabla, se muestran los valores de este coeficiente para materiales de uso común en tuberías y canales abiertos.

Tabla Valor del Coeficiente de Hazen-Williams, C_{HW}

Material	Condición	Diámetro(d) (pulgadas)	C_{HW}
Hierro dulce	Nuevo	Todos	130
		5 años	$d \leq 12$
	$8 \leq d \leq 10$		119
	$4 \leq d \leq 6$		118
	10 años	$d \leq 24$	113
		$12 \leq d \leq 20$	111
		$4 \leq d \leq 10$	107
	20 años	$d \leq 24$	100
		$12 \leq d \leq 20$	96
		$4 \leq d \leq 10$	89
	30 años	$d \leq 30$	90
		$16 \leq d \leq 24$	87
		$4 \leq d \leq 14$	75
	40 años	$d \leq 30$	83
$16 \leq d \leq 24$		80	
$4 \leq d \leq 14$		64	
50 años	$d \leq 40$	77	
	$24 \leq d \leq 36$	74	
	$4 \leq d \leq 20$	55	
Acero soldado	Constante	$d \leq 12$	120
		$8 \leq d \leq 10$	119
		$4 \leq d \leq 6$	118
Acero bridado	Constante	$d \leq 24$	113
		$12 \leq d \leq 20$	111
		$4 \leq d \leq 10$	107
Madera	Constante	Todos	120
PVC	Constante	Todos	150
Cobre	Constante	Todos	130-140

Tabla Valor del Coeficiente de Hazen-Williams, CHW, (Continuación)

Material	Condición	Diámetro(d) (pulgadas)	C_{HW}
Concreto	Colado en acero	Todos	140
	Colado en madera	Todos	120
	Centrifugado	Todos	135
Arcilla vitrificada	Buenas condiciones	Todos	100
Asbesto-cemento	Constante	Todos	140
Mampostería	Constante	Todos	100
Hierro galvanizado	Constante	Todos	120
Latón	Constante	Todos	130
Vidrio	Constante	Todos	140

Fuente: Juan G. Saldarriaga V. "Hidráulica de Tuberías", McGraw Hill, 2001

El coeficiente de Hazen-Williams, como puede apreciarse, solamente es función del tipo de material y del diámetro. Por esta razón, el uso de de esta expresión está limitado a ciertas características del fluido y del flujo. Las limitaciones establecidas por estos investigadores son las siguientes:

1. El fluido debe ser agua a temperaturas normales.
2. El diámetro debe ser superior a 2 pulgadas.
3. La velocidad media del flujo en la tubería debe ser menor o igual a 3 m/s.

Para calcular las pérdidas de carga por fricción, en función del gasto, la ecuación de Hazen-Williams se transforma en.

$$h_f = K Q^{\frac{1}{0.54}}$$

Donde

$$K = 10.674 L \left(\frac{1}{C_{HW} D^{2.63}} \right)^{\frac{1}{0.54}}$$

Para expresar la fórmula de Hazen-Williams en la forma general de Darcy-Weisbach, se transforma la ecuación en

$$h_f = \left(\frac{13.648 g L}{C_{HW}^{1.852} D^{0.852} V^{0.148}} \right) \frac{L V^2}{D 2g}$$

por lo que se desprende que

$$f = \left(\frac{13.648 g L}{C_{HW}^{1.852} D^{0.852} V^{0.148}} \right)$$

Fórmula de Chezy

Esta fórmula se aplica para tubos rugosos en la zona turbulenta y se expresa como

$$V = C \sqrt{R_H S_f}$$

El coeficiente C, de esta fórmula, se puede determinar a través de las siguientes expresiones, proporcionadas por varios investigadores:

Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\Delta}{\sqrt{R_H}}}$$

donde Δ es un parámetro que depende del material con que está construida la tubería. En la tabla 6.2, se proporcionan algunos valores comunes,

Kutter

$$C = \frac{100 \sqrt{R_H}}{m + \sqrt{R_H}}$$

donde, de nuevo, el parámetro m , depende del material utilizado en la construcción de la tubería. En la tabla siguiente, se proporcionan valores de este parámetro para materiales comunes.

Tabla Valor de los parámetros Δ y m para diferentes materiales.

Material	Δ	m
Acero nuevo sin costura	0.1	0.25
Fierro fundido limpio	0.16	0.25
Fierro fundido, usado sin incrustaciones	0.23	0.275
Fierro fundido usado con incrustaciones	0.36	0.36
Asbesto cemento nuevo	0.06	-
Concreto acabado común	0.18	-

Para determinar las pérdidas de carga por fricción, con la fórmula de Chezy, esta se transforma en

$$h_f = K Q^2$$

Donde

$$K = \frac{6.485L}{C^2 D^5}$$

Asimismo, la fórmula de Chezy expresada en la forma general propuesta por Darcy_Weisbach, se convierte en

$$h_f = \frac{8g}{C^2} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

por lo que

$$f = \frac{8g}{C^2}$$

Fórmula de Manning

Esta fórmula es más apropiada para resolver problemas de flujo en canales y cauces naturales. Sin embargo, se utiliza frecuentemente en tuberías a presión, debido a la facilidad de su solución. La forma original Robert Manning es

$$V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} S_f^{1/2}$$

donde n se conoce como el coeficiente de Manning y depende solamente del material de construcción de la tubería. En la siguiente tabla, se muestran algunos valores para materiales comúnmente utilizados en tuberías

Tabla Valores del coeficiente Manning para tuberías

Material	n
Acero Galvanizado	0.014
Acero remachado nuevo	0.015 a 0.016
Acero soldado ó con remache, avellanado o embutido nuevo	.012 a 0.013
Acero fundido limpio	0.013

5.4.3.2 Pérdidas de Carga Locales

Este tipo de pérdidas se distinguen de las de fricción en que ocurren en un punto de la tubería y se originan por diversas causas tal como, un cambio en la dirección del flujo causado por un codo; una reducción ó ampliación del conducto; obstrucciones producidas por válvulas ó rejillas, bifurcaciones del flujo y por la entrada y salida a un depósito. Cada una de estas situaciones causa pérdidas de energía que se determinan en función de la carga de velocidad, de la siguiente manera

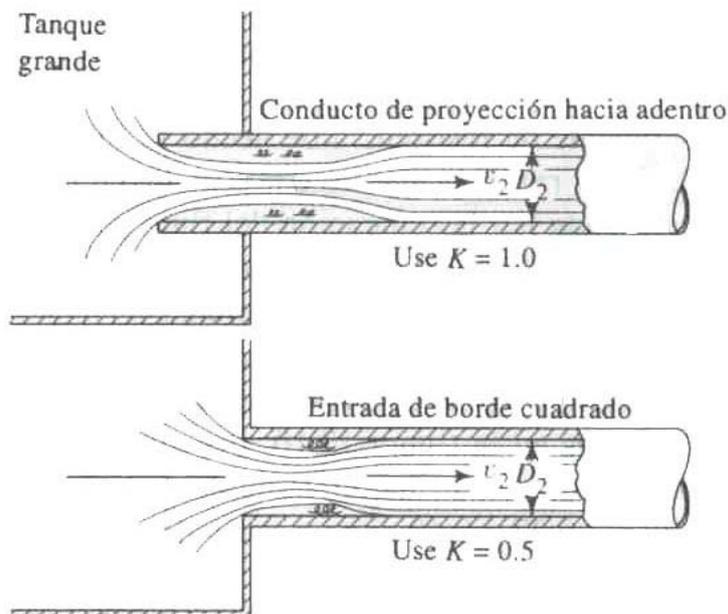
$$h_l = K \frac{V^2}{2g}$$

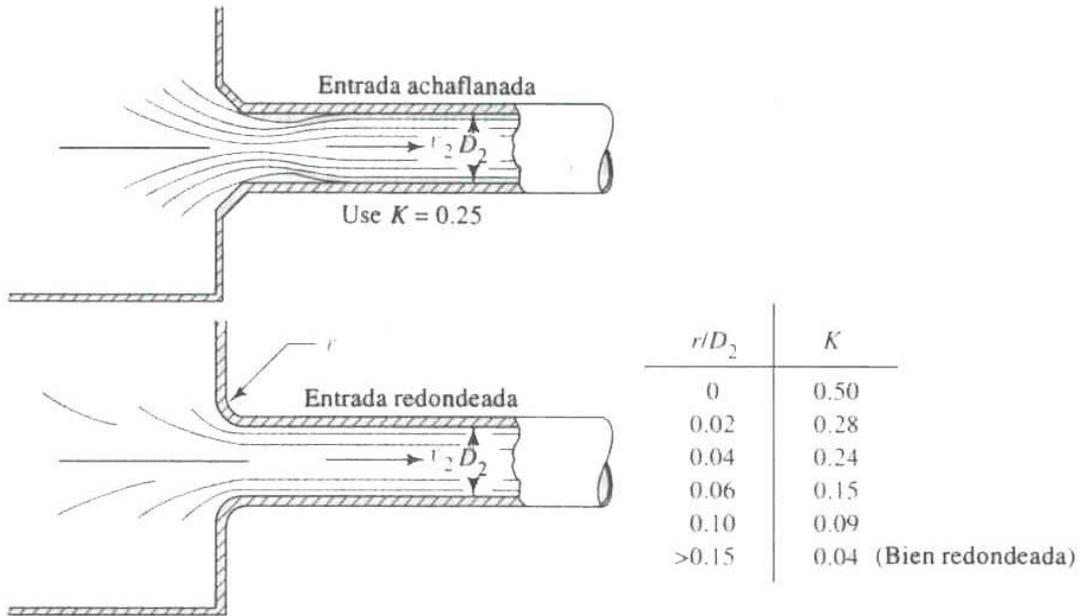
Donde K es un coeficiente que depende del tipo de accesorio y no tiene unidades ya que solamente representa un porcentaje de la carga de velocidad.

Las pérdidas locales también se conocen como *pérdidas menores* ya que comparadas con las causadas por fricción, tienden a ser más pequeñas. Sin embargo en sistemas de tubos cortos, las pérdidas locales sobrepasan las de fricción. Por lo tanto, es más preciso referirse a estas como pérdidas locales.

Depósito a una tubería

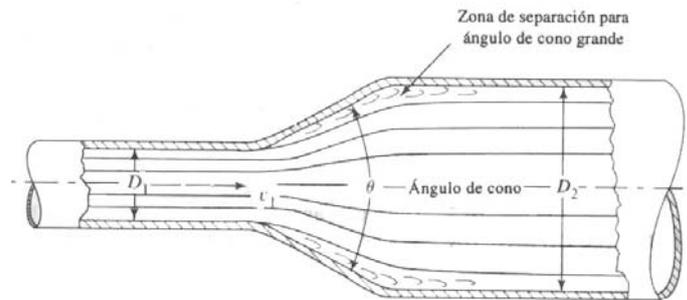
El flujo de un fluido, al entrar de un depósito a una tubería, experimenta una pérdida de energía ya que debido a la contracción de la región de flujo, se generan zonas de separación ó muertas en el conducto cerca de la conexión con el depósito. Por lo tanto, la forma de la conexión tiene una gran influencia en la magnitud de estas pérdidas. En las figuras siguientes se muestran algunos valores de K , ara este tipo de situaciones.



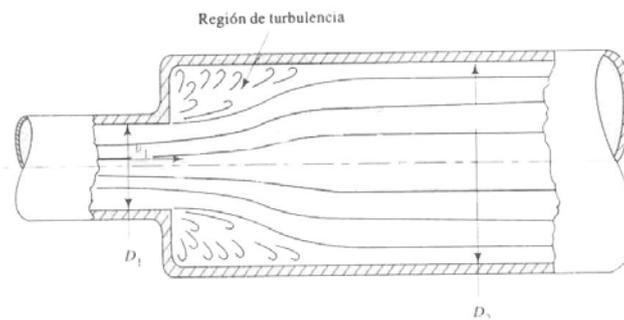


Ampliación de la tubería

Este tipo de pérdidas se origina al encontrarse una ampliación en la sección del conducto transversal al flujo, la cual puede ser gradual o brusca, como se muestra en las figuras siguientes

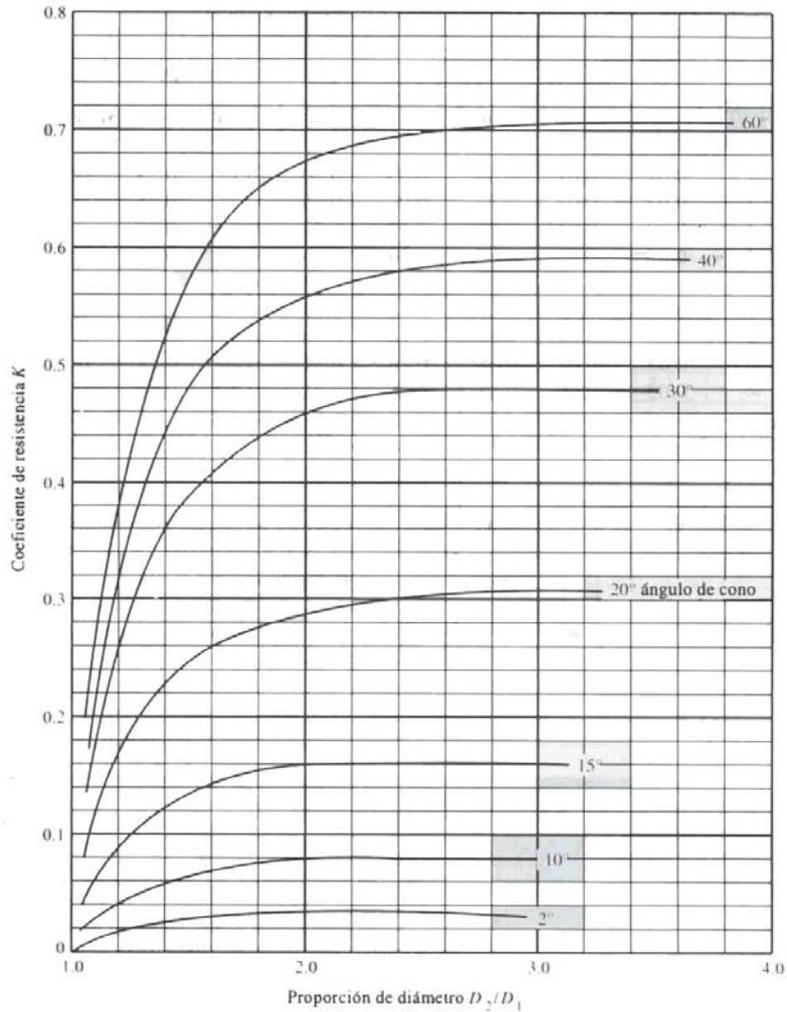


Ampliación Gradual



Ampliación brusca

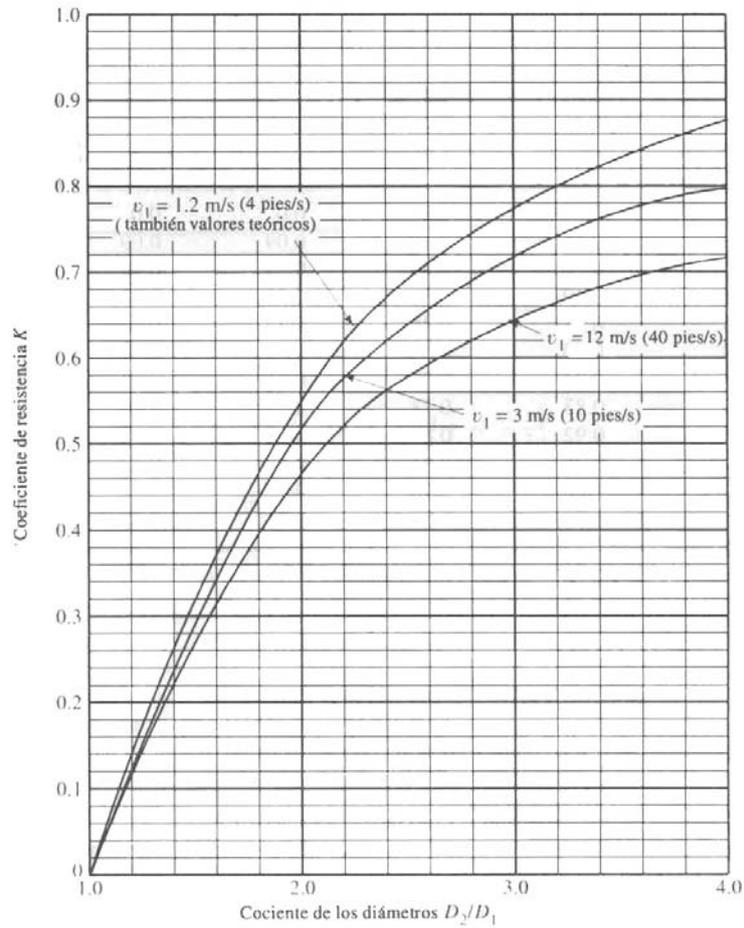
.El coeficiente K que depende de la forma de la ampliación, se puede determinar con las siguientes gráficas



D_2/D_1	Ángulo del cono, θ											
	2°	6°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°
1.1	0.01	0.01	0.03	0.05	0.10	0.13	0.16	0.18	0.19	0.20	0.21	0.23
1.2	0.02	0.02	0.04	0.09	0.16	0.21	0.25	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37
1.4	0.02	0.03	0.06	0.12	0.23	0.30	0.36	0.41	0.44	0.47	0.50	0.53
1.6	0.03	0.04	0.07	0.14	0.26	0.35	0.42	0.47	0.51	0.54	0.57	0.61
1.8	0.03	0.04	0.07	0.15	0.28	0.37	0.44	0.50	0.54	0.58	0.61	0.65
2.0	0.03	0.04	0.07	0.16	0.29	0.38	0.46	0.52	0.56	0.60	0.63	0.68
2.5	0.03	0.04	0.08	0.16	0.30	0.39	0.48	0.54	0.58	0.62	0.65	0.70
3.0	0.03	0.04	0.08	0.16	0.31	0.40	0.48	0.55	0.59	0.63	0.66	0.71
∞	0.03	0.05	0.08	0.16	0.31	0.40	0.49	0.56	0.60	0.64	0.67	0.72

Fuente: King, H.W. y E.F. Brater, 1963. *Handbook of Hydraulics*, 5ª ed. Nueva York: McGraw-Hill. (Tabla 6-8.)

Valores del coeficiente K, para ampliaciones graduales



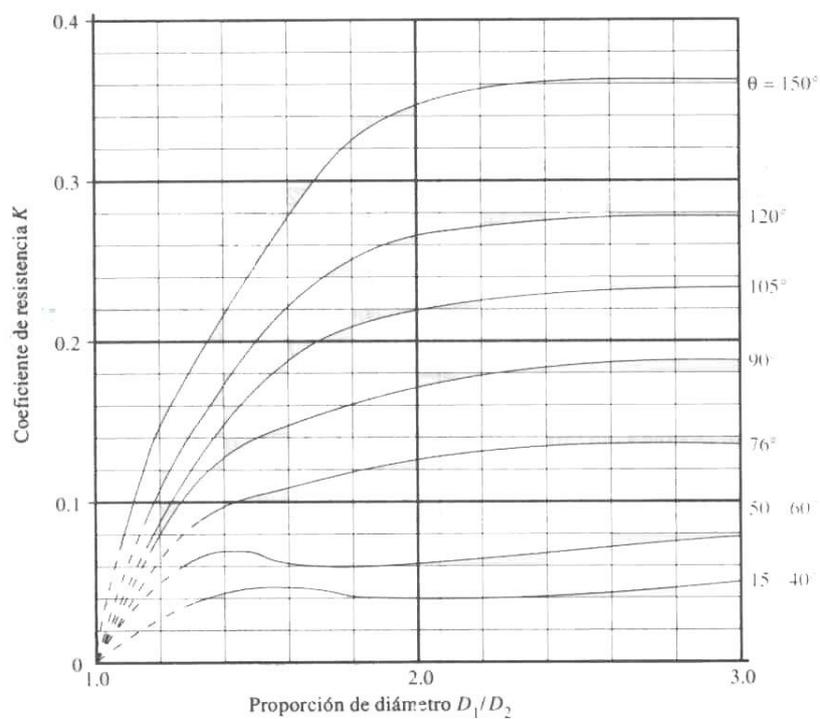
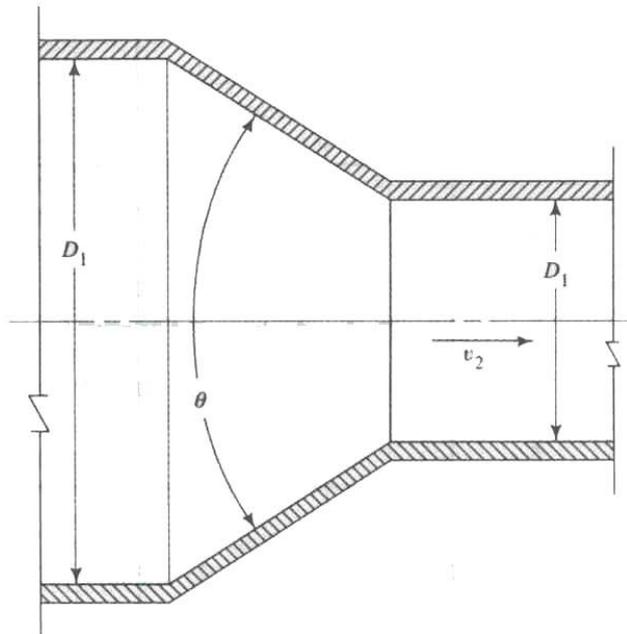
D_2/D_1	Velocidad, v_1						
	0.6 m/s 2 pies/s	1.2 m/s 4 pies/s	3 m/s 10 pies/s	4.5 m/s 15 pies/s	6 m/s 20 pies/s	9 m/s 30 pies/s	12 m/s 40 pies/s
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.2	0.11	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08
1.4	0.26	0.25	0.23	0.22	0.22	0.21	0.20
1.6	0.40	0.38	0.35	0.34	0.33	0.32	0.32
1.8	0.51	0.48	0.45	0.43	0.42	0.41	0.40
2.0	0.60	0.56	0.52	0.51	0.50	0.48	0.47
2.5	0.74	0.70	0.65	0.63	0.62	0.60	0.58
3.0	0.83	0.78	0.73	0.70	0.69	0.67	0.65
4.0	0.92	0.87	0.80	0.78	0.76	0.74	0.72
5.0	0.96	0.91	0.84	0.82	0.80	0.77	0.75
10.0	1.00	0.96	0.89	0.86	0.84	0.82	0.80
∞	1.00	0.98	0.91	0.88	0.86	0.83	0.81

Fuente: H. W. King y E. F. Brater. 1963. *Handbook of Hydraulics*, 5ª ed. Nueva York: McGraw-Hill. (Tabla 6-7. Velocidades convertidas a unidades SI.)

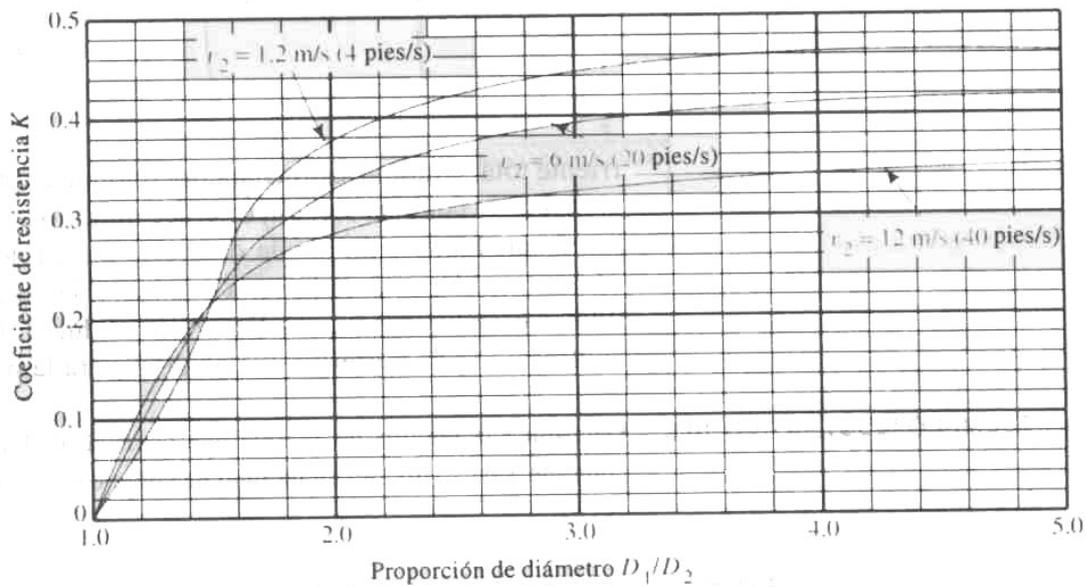
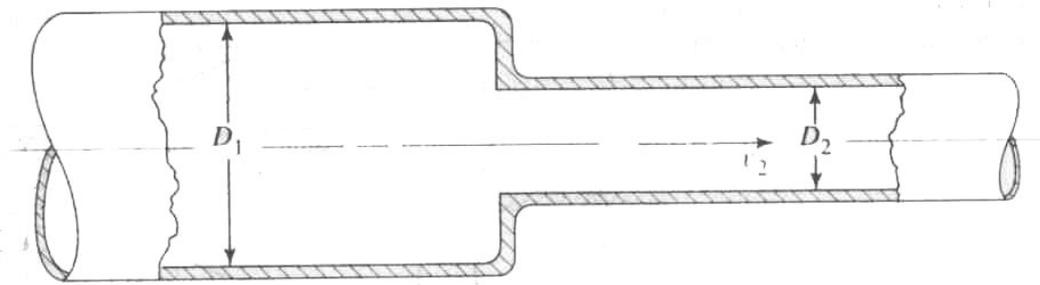
Valores del coeficiente K, para ampliaciones bruscas.

Reducción de la tubería

Como en el caso de las ampliaciones, las reducciones de tuberías pueden ser graduales o bruscas, como se muestra en las figuras siguientes



Valores del coeficiente K , para reducciones graduales



Valores del coeficiente K, para reducciones bruscas

Pérdidas en válvulas

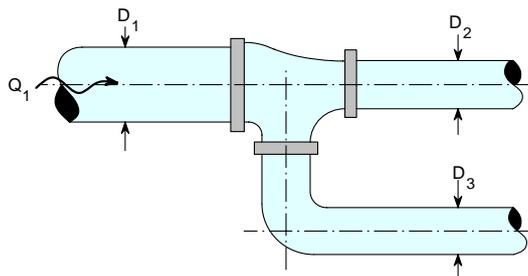
Al paso del flujo a través de las válvulas de control, que generalmente se utilizan para la operación de los conductos, se genera una pérdida local, que se puede calcular con la fórmula general de pérdidas locales que se presentó anteriormente, donde el coeficiente K toma los siguientes valores:

TIPO	K
Globo	6 – 10
Compuerta	0.2
Mariposa	0.15 – 0.50

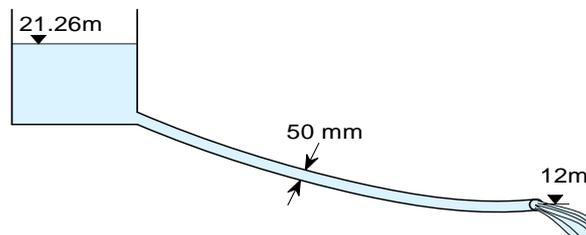
Ejemplo 1: Un conducto de 30 cm de diámetro conduce agua a 50 cm/s, ¿Cuánto tendrá que reducirse la salida del conducto (en %) para obtener un chorro con una velocidad de 2 m/s?

Ejemplo 2: ¿Con que velocidad se mueve un gasto de 35 l/s de agua en una tubería de 35 cm de diámetro?. Si el diámetro se reduce a 15 cm, ¿qué velocidad adquiere el agua?

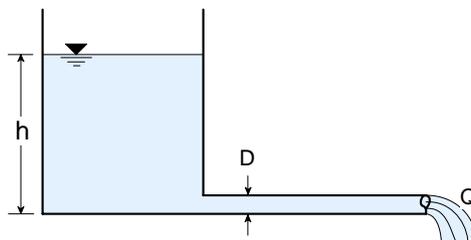
Ejemplo 3: Un conducto de 15 cm de diámetro transporta 75 l/s. El conducto se ramifica en 2, como se muestra en la figura. Si la velocidad del flujo en el conducto 2 ($D_2 = 10$ cm) es de 5.5 m/s, encontrar (a) el gasto en el conducto 3 ($D_3 = 5$ cm) y (b) la velocidad en los conductos 1 y 3.



Ejemplo 4: Desde el depósito que se muestra en la figura se está enviando agua hacia una cota más baja, descargando en el aire. Para los datos que aparecen en la figura, determinar el gasto en la descarga cuando la pérdida de carga es 6 veces mayor que la carga de velocidad.

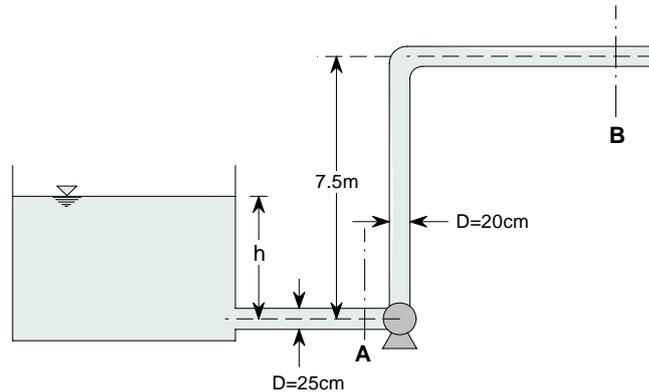


Ejemplo 5: Desde el depósito que se muestra en la figura se está enviando agua hacia una cota más baja, descargando en el aire. Para una profundidad (h) de 16 m y un diámetro (D) de 50 cm, determinar el gasto en la descarga cuando la pérdida de carga total es de 12 m.



Ejemplo 6: Tomando como referencia el esquema del ejemplo 5, considerando que la tubería es de acero comercial de 20" nominal y con una longitud de 40.5 m ¿cuál será el gasto que se puede conducir, si se mantiene la carga constante en el depósito.

Ejemplo 7: En el sistema mostrado en la figura, calcular la potencia requerida de una bomba para extraer 95 l/s del recipiente y descargarlos libremente en el punto B. La pérdida de carga entre el recipiente y el punto A es de 20 cm y entre la bomba y el punto B es de 8.5 m. La eficiencia de la bomba es de 85 % y antes de la bomba se tiene una carga $h=2.5$ m



Ejemplo 8: Para desinfectar el agua tratada de una planta de tratamiento de aguas residuales, se requiere inyectar 0.09 lt/s de cloro líquido a la mitad de la longitud de una tubería de 8 pulgadas de diámetro nominal de PVC C-5, de 52 m de longitud y que descarga libremente a un canal de contacto de cloro. Si la tubería sale del fondo de un clarificador que tiene un tirante constante de agua 4.75 m, ¿qué potencia requiere la bomba de ayuda del clorador? Considere: que el sistema está en un terreno plano, que el peso específico del agua tratada es de 1000 kg/m^3 ; la eficiencia de la bomba de ayuda es de 78%; y que no se tienen pérdidas de energía significativas entre el clorador y el punto de inyección al tubo.